# বীজগণিত

প্রথম খণ্ড

শ্রীচারুচন্দ্র চক্রবর্ত্তী
শ্রীমানদাচরণ গুপ্ত

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক VII-VIII শ্রেণীর জন্য অনুমোদিত
( 23/12/1954 তারিখের কলিকাতা গেজেটে 27/11/1954 তারিখের সিল/64/54 নং বিজ্ঞপ্তি দ্রষ্টব্য )
গৌহাটি বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক অনুমোদিত ( 20/12/1960 তারিখের 14 নং বিজ্ঞপ্তি দ্রষ্টব্য )

# বীজগণিত

## প্রথম খণ্ড

( মাধ্যমিক, উচ্চমাধ্যমিক ও বহুমুখী বিদ্যালয়ের
সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য )

কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজিয়েট স্কুলের অবসরপ্রাপ্ত প্রধান গণিত-শিক্ষক

**শ্রীচারুচন্দ্র চক্রবর্তী**

ও

কলিকাতা রাণীভবানী স্কুলের অবসরপ্রাপ্ত প্রধান গণিত-শিক্ষক

**শ্রীমানদাচরণ গুপ্ত**

প্রণীত

**বাণী মন্দির পাব্লিশার্স প্রাঃ লিঃ**
197-B, মুক্তারামবাবু ষ্ট্রীট, কলিকাতা-7



[ মূল্য 3 টাকা 60 পয়সা

## প্রথম খণ্ড

সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য

( সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ )


| বিষয় | পৃষ্ঠাঙ্ক |
|---|---|
| উপক্রমণিকা ... ... | 1 |
| প্রথম অধ্যায়—বীজগণিতের প্রতীক ... ... | 3 |
| দ্বিতীয় অধ্যায়—ধনরাশি ঘটিত প্রথম চারি নিয়ম ( সহজ ) | 21 |
| যোগ ... ... | 21 |
| বিয়োগ ... ... | 25 |
| গুণন ... ... | 28 |
| ভাগ ... ... | 37 |
| তৃতীয় অধ্যায়—সাধারণ ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা ... | 44 |
| চতুর্থ অধ্যায়—প্রথম চারি নিয়ম ( ধনরাশি ও ঋণরাশি ঘটিত ) | 53 |
| যোগ ... ... | 53 |
| বিয়োগ ... ... | 58 |
| গুণন ... ... | 61 |
| ভাগ ... ... | 65 |
| পঞ্চম অধ্যায়—বন্ধনীর ব্যবহার ও অপসারণ ... | 68 |
| ষষ্ঠ অধ্যায়—সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ ... | 71 |
| সপ্তম অধ্যায়—সরল সমীকরণ ( সহজ ) ... | 80 |
| অষ্টম অধ্যায়—লেখ-চিত্র ( অনুভূমিক লেখ ) ... | 97 |

( অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ )


| বিষয় | | | পৃষ্ঠাঙ্ক |
|---|---|---|---|
| **নবম অধ্যায়**—পুনরালোচনা—বিবিধ প্রশ্ন (1) | | … | 103 |
| **দশম অধ্যায়**—দুরূহ গুণন ও ভাগ | … | … | 108 |
| দুরূহ গুণন | … | … | 108 |
| দুরূহ ভাগ | … | … | 115 |
| **একাদশ অধ্যায়**—সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ | | … | 120 |
| **দ্বাদশ অধ্যায়**—উৎপাদক নির্ণয় ও অভেদ | | … | 135 |
| উৎপাদক নির্ণয় | … | … | 135 |
| অভেদ | … | … | 152 |
| **ত্রয়োদশ অধ্যায়**—গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক ( উৎপাদক সাহায্যে ) | | … | 163 |
| গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক | | … | 163 |
| লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক | | … | 168 |
| **চতুর্দশ অধ্যায়**—ভগ্নাংশ | … | … | 174 |
| **পঞ্চদশ অধ্যায়**—সরল সমীকরণ | … | … | 197 |
| **ষোড়শ অধ্যায়**—বিবিধ বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে সরল সমীকরণের প্রয়োগ | | | 205 |
| **সপ্তদশ অধ্যায়**—স্তম্ভ-লেখ ও ছক-কাগজের ব্যবহার | | … | 214 |
| স্তম্ভ-লেখ | … | … | 214 |
| ছক-কাগজের ব্যবহার | | … | 219 |
| **উত্তরমালা**— | … | … | 227-250 |
| **পরিশিষ্ট**—আদর্শ প্রশ্নপত্র | … | … | (1)-(8) |
| বীজগণিতের নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষা ( Objective Tests in Algebra ) | … | … | (9)-(20) |
| **পরিভাষা**— | … | … | (21)-(23) |

Syllabus as published in the Calcutta Gazette,
August 6 and December 10, 1953.

# ALGEBRA

## Class VII

1. The use of letters as symbols to generalise simple arithmetical problems ( without formally introducing equations ) and formulæ like area = length × breadth, i.e., $A = L \times B$.

2. The four simple rules involving positive quantities only.

3. Positive and negative quantities through graphical illustrations.

4. The four simple rules involving both positive and negative quantities.

5. The use of brackets.

6. The following formulæ and their easy applications :—

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

7. Solution of simple problems leading to simple equations.

8. Bar graphs from numerical data based on activities and experiences of daily life of the pupils.

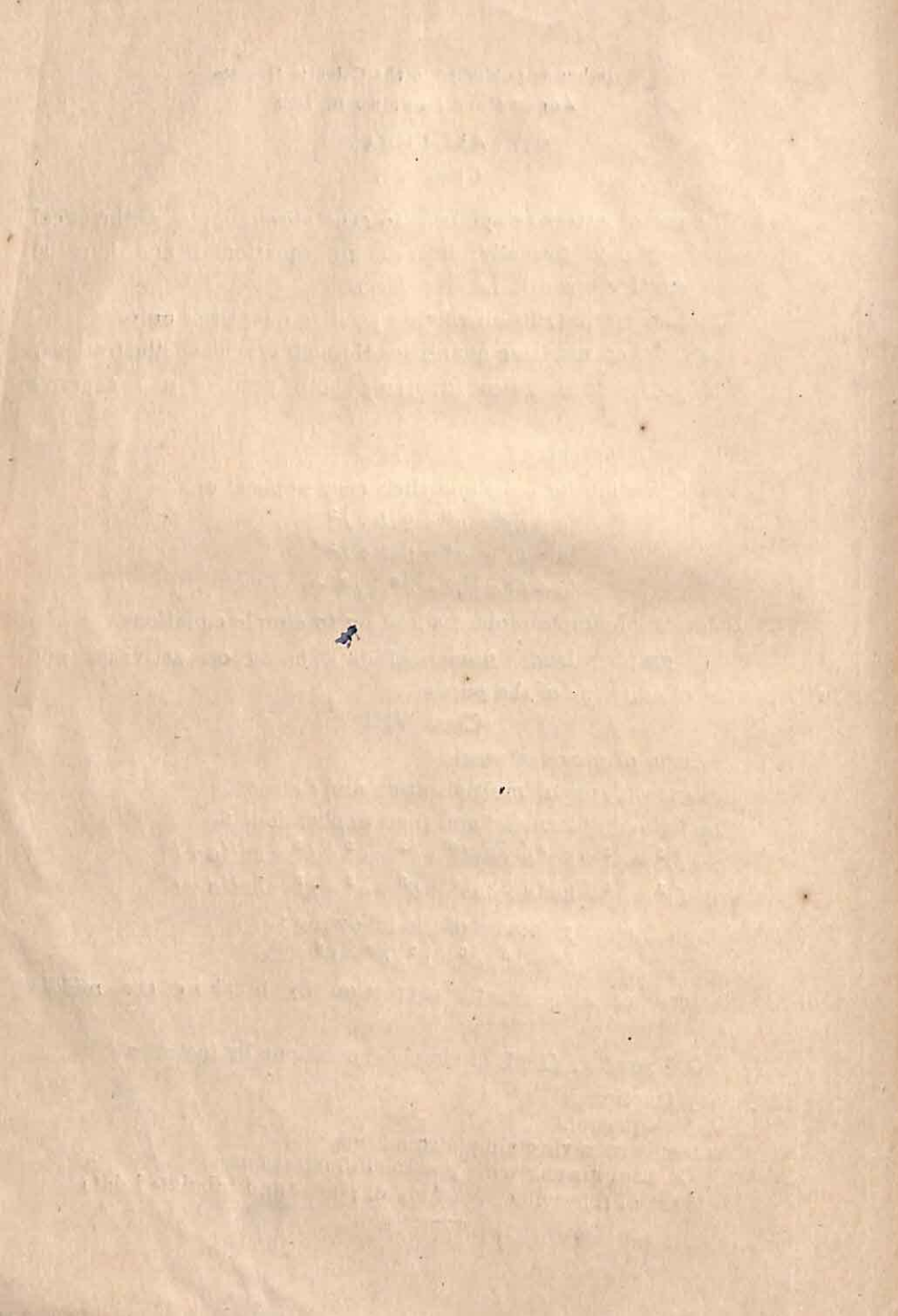
## Class VIII

1. Revision of previous work.
2. Advanced types of multiplication and division.
3. The following formulæ and their applications :—

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

4. Simple factors ; factors of the following :—

$$a^2 - b^2,\ a^3 + b^3,\ a^3 - b^3$$

5. Factors of a quadratic expression by breaking the middle term.
6. H. C. F. and L. C. M. of simple expressions by factorisation.
7. Easy fractions.
8. Simple equations.
9. Problems involving simple equations.
10. (*a*) Column graphs with practical illustrations.
    (*b*) Axes of reference ; Plotting of points and tabulated data

# প্রথম খণ্ড

## সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য

## ( সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ )

## উপক্রমণিকা

**বীজগণিত।** মূলতঃ বীজগণিত ও পাটীগণিত অভিন্ন। বীজগণিত ও পাটীগণিত প্রত্যেকেই সংখ্যাগণিতের এক একটি শাখা। সংখ্যাত্মক আলোচনাই উভয়ের বিষয়বস্তু। যোগ-বিয়োগ-গুন-ভাগ প্রভৃতি প্রক্রিয়া এবং সংশ্লিষ্ট চিহ্নাদি পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও ব্যবহৃত হইয়া থাকে। কিন্তু পাটীগণিত অপেক্ষা বীজগণিতে প্রক্রিয়া এবং সূত্রাদি অধিকতর ব্যাপকভাবে আলোচিত ও ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

একখানি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং বিস্তার 8 মিটার হইলে, উহার
ক্ষেত্রফল $= (10 \times 8)$ বর্গমিটার $= 80$ বর্গ মিটার।

একটি মাঠের দৈর্ঘ্য 3 কিলোমিটার এবং প্রস্থ 2 কিলোমিটার হইলে, উহার
ক্ষেত্রফল $= (3 \times 2)$ বর্গকিলোমিটার $= 6$ বর্গকিলোমিটার।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে কোন আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের গুণফলের সমান।

এখন, দৈর্ঘ্যকে $L$, প্রস্থকে $B$ এবং ক্ষেত্রফলকে $A$ দ্বারা সূচিত করিলে
$A = L \times B$ (Area = Length × Breadth).

আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের উক্ত নিয়ম বা সূত্রটি সকল প্রকার আয়ত সম্বন্ধেই প্রযোজ্য। সুতরাং প্রথম দুইটি উদাহরণকে উহার বিশিষ্ট উদাহরণস্থল মনে করা যাইতে পারে। প্রকৃতপক্ষে বীজগণিতের বহুব্যাপক মূলসূত্র বা বীজসূত্রগুলির বিশিষ্ট ব্যবহারই পাটীগণিতের আলোচ্য বিষয়। এইজন্যই স্যার আইজাক নিউটন বীজগণিতকে নিখিল পাটীগণিত ( Universal Arithmetic ) বলিয়াছেন।

ভাস্করাচার্যের মতে গণিত দ্বিবিধ—ব্যক্ত এবং অব্যক্ত। পাটীগণিত ব্যক্ত গণিত এবং বীজগণিত অব্যক্ত গণিত। ব্যক্ত গণিতের নিয়মাবলী অব্যক্ত গণিতের মূল সূত্রের উপর প্রতিষ্ঠিত।

---

# প্রথম অধ্যায়

## বীজগণিতের প্রতীক ( Algebraic Symbols )

1. পাটীগণিতে যে সমস্ত সংখ্যা ব্যবহৃত হয় তাহাদের মান সুনির্দিষ্ট ; কিন্তু পাটীগণিতে ব্যবহৃত সুনির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও বীজগণিতে এমন কতকগুলি অক্ষর ব্যবহৃত হয় যাহাদের কোন নির্দিষ্ট মান নাই অথবা স্থল বিশেষে যাহাদের মান শর্তসাপেক্ষ। পাটীগণিতে $12+8=20$. ইহার অর্থ 12 এবং 8 এর সমষ্টি 20. বীজগণিতে $a+b=c$ এর অর্থ $a$ এবং $b$ দ্বারা প্রকাশিত দুইটি সংখ্যার সমষ্টি $c$ দ্বারা প্রকাশিত সংখ্যার সমান। এখন, $c=20$ হইলে, $a$ ও $b$ এমন দুইটি সংখ্যা হইবে যাহাদের সমষ্টি 20, যেমন 12 এবং 8, 16 এবং 4, 2 এবং 18, $2\frac{1}{2}$ এবং $17\frac{1}{2}$ ইত্যাদি। সুতরাং পাটীগণিতের সংখ্যাগুলির মান নির্দিষ্ট এবং সীমাবদ্ধ, কিন্তু বীজগণিতের অক্ষর দ্বারা যে সংখ্যাগুলি প্রকাশ করা হয় তাহাদের মান অনির্দিষ্ট এবং বহুব্যাপক।

বীজগণিতে ব্যবহৃত সংখ্যাবোধক অক্ষরগুলিকে **সংখ্যা প্রতীক** বা শুধু **প্রতীক** (Symbols) বলা হয়। সংখ্যাপ্রতীক হিসাবে বাংলা বর্ণমালার ক, খ, গ, ইত্যাদি, ইংরেজী বর্ণমালার $a, b, c, \cdots\cdots, A, B, C, \cdots\cdots, X, Y, Z \cdots\cdots\cdots$ অথবা গ্রীক বর্ণমালার $\alpha$ (alpha), $\beta$ (beta), $\gamma$ (gamma),……ইত্যাদি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। ( এই পুস্তকে প্রধানতঃ ইংরেজী বর্ণমালার অক্ষরই ব্যবহৃত হইবে। বীজগণিতের প্রতীক সংখ্যাবোধক। উহা কোন বিশেষ বস্তু বা পরিমাণ সূচিত করে না। যেমন, কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য মাত্র $x$-এর দ্বারা সূচিত হয় না, উহা $x$-সে. মি., $x$-মিটার $x$-কিলোমিটার, ইত্যাদি প্রকারে সূচিত হইয়া থাকে।

### 2. বীজগণিতে ব্যবহৃত চিহ্নাদি।

প্রক্রিয়াবোধক চিহ্ন হিসাবে বীজগণিতে $+$, $-$, $\times$, $\div$, এই চারিটি চিহ্ন দ্বারা পাটীগণিতের ন্যায় যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রক্রিয়া সূচিত হয়।

এতদ্ব্যতীত নিম্নলিখিত চিহ্নগুলিও গণিতে ব্যবহৃত হয়,

$>$ বৃহত্তর ( $a > b$ অর্থাৎ $a$, $b$ অপেক্ষা বৃহত্তর )

$<$ ক্ষুদ্রতর ( $a < b$ অর্থাৎ $a$, $b$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর )

= সমিত চিহ্ন ($a=b$ অর্থাৎ $a$, $b$-র সমান)

≡ সর্বসম বা অভিন্ন ($a\equiv b$ অর্থাৎ $a$ ও $b$-র যে কোন মানেই উহারা সর্বসম)

≠ সমান নহে ($a\neq b$ অর্থাৎ $a$, $b$-র সমান নহে)

≯ বৃহত্তর নহে ($a \ngtr b$ অর্থাৎ $a$, $b$ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে)

≮ ক্ষুদ্রতর নহে ($a \nless b$ অর্থাৎ $a$, $b$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে)

∵ যেহেতু ∴ সুতরাং

∼ অন্তর ($a\sim b$ অর্থাৎ $a$ এবং $b$-র অন্তর। এস্থলে বড়টি হইতে ছোটটি বিয়োগ করিতে হয়। যেমন, $8\sim 5=3$, $5\sim 8=3$).

## 3. বীজগণিতে প্রতীকের সংখ্যাত্মক জ্ঞান ও প্রতীকের ব্যবহার।

শৈশবকাল হইতেই শিক্ষার্থীদের 1, 2, 3, 4,···ইত্যাদি পাটীগণিতের সংখ্যার সহিত পরিচয় ঘটিয়া থাকে। কয়খানি হাত, কয়টি চোখ, কয়টি আঙ্গুল, কয়খানি পাঠ্যপুস্তক, ক্লাসে কয়জন ছাত্র, কয়জন শিক্ষক পড়ান, ইত্যাদি নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুর সীমাবদ্ধ সংখ্যাজ্ঞান পাটীগণিত শিক্ষার সাহায্যে শিশুমনে প্রসার লাভ করে এবং 1, 2, 3, 4,·· প্রভৃতি অঙ্ক দ্বারা উহাদিগকে প্রকাশ করিতে এবং উহাদের যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ প্রভৃতি নানাবিধ প্রক্রিয়া করিতে শিক্ষা দেওয়া হয়। অক্ষর দ্বারা সংখ্যা প্রকাশ প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে সম্পূর্ণ অভিনব। এইজন্য সংখ্যার পরিবর্তে অক্ষর-প্রতীক ব্যবহার শিক্ষার জন্য কয়েকটি প্রশ্নমালা দেওয়া হইল। প্রথম প্রশ্নমালাটি মুখে মুখে আলোচনা করাই বাঞ্ছনীয়।

পাটীগণিতে দুই বা ততোধিক বিভিন্ন সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা একটি বিশিষ্ট নূতন রূপের সংখ্যা উৎপন্ন হয়, কিন্তু বীজগণিতের ভিন্ন ভিন্ন প্রতীকের উক্ত প্রক্রিয়া দ্বারা কোন নূতন প্রতীক উৎপন্ন হয় না।

বীজগণিত ও পাটীগণিতের সংখ্যাপাতন প্রণালীর একটি বিশেষ পার্থক্য লক্ষ্য করিবার মত। বীজগণিতে $a$ ও $b$-এর গুণফলকে সাধারণতঃ $ab$ রূপে লিখিত হয়; ইহাকে $a\times b$ বা $a.\ b$ রূপেও লেখা যাইতে পারে। পাটীগণিতে 2 এবং 5-এর গুণকে $2\times 5$ বা $2.\ 5$ রূপেও লেখা হয়; কিন্তু 25 লিখিলে ভুল হইবে। কারণ $2\times 5=10$, কিন্তু $25=2\times 10+5$,

এস্থলে মাত্র প্রাথমিক আলোচনার জন্য কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

| ( পাটীগণিত ) | ( বীজগণিত ) |
|---|---|
| (i) 5 ও 6-এর সমষ্টি $=5+6=11$ | (i) $a$ ও $b$ এর সমষ্টি $=a+b$<br>5 ও $b$ এর সমষ্টি $=5+b$ |
| (ii) 8 হইতে 5 এর বিয়োগফল $=8-5=3$ | (ii) $a$ হইতে $b$ এর বিয়োফল $=a-b$<br>$a$ হইতে 2 এর বিয়োগফল $=a-2$ |
| (iii) 9 এবং 8 এর গুণফল $=9\times 8=72$ | $a$ এবং $b$ এর গুণফল $=a\times b$ অথবা $ab$<br>5 এবং $b$ এর গুণফল $=5\times b$ অথবা $5b$ |
| (iv) 10 কে 5 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $=10\div 5$ বা $\frac{10}{5}=2$ | (iv) $a$ কে $b$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $=a\div b$ অথবা $\frac{a}{b}$ |

## প্রশ্নমালা 1

### ( মৌখিক )

প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর :

1. দুইটি সংখ্যার যোগ ( যেমন, $a+b$, $x+y$, ইত্যাদি )।
2. দুইটি সংখ্যার বিয়োগ। 3. দুইটি সংখ্যার গুণ।
4. একটি সংখ্যাকে আর একটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ।
5. দুইটি সংখ্যা পরস্পর সমান। 6. দুইটি রাশি অভিন্ন।
7. একটি সংখ্যা আর একটি সংখ্যা হইতে বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর।
8. একটি বাঁশের দৈর্ঘ্য $x$-মিটার অপেক্ষা 5 মিটার বেশী বা কম।
9. একটি বেঞ্চ $x$-মিটার লম্বা ; উহার দ্বিগুণ আর একটি বেঞ্চ কত লম্বা ?
10. এক ব্যক্তির মাসিক আয় $x$-টাকা ; যাহার মাসিক আয় উহার অর্ধেক তাহার মাসিক আয় কত ?
11. একটি চৌবাচ্চায় $x$-লিটার জল আছে ; উহা হইতে 15 লিটার জল তুলিয়া লইলে আর কত লিটার জল অবশিষ্ট থাকে ?
12. 10 অপেক্ষা $x$ কত বেশী ?
13. $x$-টাকায় কত পয়সা ?

14. $y$-কিলোগ্রামে কত গ্রাম ? 15. $x$-কিলোমিটারে কত মিটার ?

16. $a$-টাকা $b$-পয়সায় কত পয়সা ?

17. $x$-টাকায় একটি ঘড়ি ক্রয় করিয়া $y$-টাকা লাভে বিক্রয় করিলে, বিক্রয়-মূল্য কত ?

18. $x$-টাকায় একটি ঘড়ি ক্রয় করিয়া $y$-টাকায় বিক্রয় করায় লোকসান হইল। লোকসানের পরিমাণ কত ?

19. $a$-টাকায় একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া $b$-টাকায় বিক্রয় করায় লাভ হইল ; লাভের পরিমাণ কত ?

20. যাহার বর্তমান বয়স $x$-বৎসর, 5 বৎসর পূর্বে তাহার বয়স কত ছিল ?

21. 8 বৎসর পূর্বে যাহার বয়স $y$-বৎসর ছিল, তাহার বর্তমান বয়স কত?

22. একখানি ট্রেন ঘণ্টায় $x$-কিলোমিটার চলে, 8 ঘণ্টায় উহা কত কিলোমিটার চলিবে ?

23. "দুইটি সংখ্যার যোগফল = 125" প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর।

24. সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রসখ্যা অষ্টম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার দ্বিগুণ; অক্ষর-প্রতীকে প্রকাশ কর।

25. 8 জন ভিক্ষুকের প্রত্যেককে $y$-টাকা করিয়া দিতে আমার $x$-টাকা খরচ হইল ; $x =$ কত ?

26. একখানি ট্রেন ঘণ্টায় $x$-কিলোমিটার বেগে 15 ঘণ্টায় $y$-কিলোমিটার গেল ; $y =$ কত ?

27. কোন মজুরের দৈনিক বেতন $x$-টাকা ; সে 15 দিন কাজ করিয়া $y$-টাকা পাইল ; $y =$ কত ?

28. কোন আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য $a$-মিটার, প্রস্থ $b$-মিটার, এবং ক্ষেত্রফল $c$-বর্গমিটার ; $c =$ কত ?

**4. বৈজিক রাশির সাংখ্যমান।** বৈজিক প্রতীকের পরিবর্তে বিভিন্ন প্রতিকল্প পাটীগণিতের সংখ্যা বসাইয়া বৈজিক রাশির সাংখ্যমান নির্ণয় করিলে, বৈজিক প্রতীকের সংখ্যাত্মক ধারণা প্রথম শিক্ষার্থীর মনে দৃঢ়তর হইবে। নিম্নোক্ত উদাহরণগুলিতে ( সংক্ষেপে উদা. ) **প্রতিকল্প স্থাপন প্রণালী** ( Substitution ) লক্ষ্য কর।

উদা. 1. $a=3$ হইলে, $5a$-র মান নির্ণয় কর।

$$5a=(5\times a)=(5\times 3)=15.$$

উদা. 2. $a=2,\ b=3,\ c=5$ হইলে, $2a+3b+4c$-এর মান কত?

$$\left.\begin{aligned}2a&=(2\times 2)=4\\3b&=(3\times 3)=9\\4c&=(4\times 5)=20\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\therefore\ &2a+3b+4c\\&=4+9+20\\&=33.\end{aligned}$$

(সংক্ষেপে) $2a+3b+4c=(2\times 2)+(3\times 3)+(4\times 5)$

$$=4+9+20=33.$$

উদা. 3. $a=5,\ b=6,\ c=7$ হইলে, $5a-6b+3c$-এর মান কত?

$$\left.\begin{aligned}5a&=(5\times 5)=25\\6b&=(6\times 6)=36\\3c&=(3\times 7)=21\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\therefore\ &5a-6b+3c\\&=25-36+21\\&46-36=10.\end{aligned}$$

(সংক্ষেপে) $5a-6b+3c=(5\times 5)-(6\times 6)+(3\times 7)$

$$=25-36+21=46-36=10.$$

উদা. 4. $a=3,\ b=4,\ c=5$ হইলে, $3abc$-এর মান কত?

$$3abc=(3\times 3\times 4\times 5)=180.$$

উদা. 5. $a=4,\ b=2,\ c=3$ হইলে, $4ab-3ac+bc$-এর মান কত?

$$\left.\begin{aligned}4ab&=(4\times 4\times 2)=32\\3ac&=(3\times 4\times 3)=36\\bc&=(2\times 3)\quad\ =6\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\therefore\ &4ab-3ac+bc\\&=32-36+6\\&=38-36=2.\end{aligned}$$

উদা. 6. $a=8,\ b=7,\ c=14$ হইলে, $4ab\div 2c$-এর মান কত?

$$\left.\begin{aligned}4ab&=(4\times 8\times 7)=224\\2c&=(2\times 14)\quad=\ 28\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\therefore\ &4ab\div 2c\\&=224\div 28\\&=8.\end{aligned}$$

(সংক্ষেপে) $4ab\div 2c=(4\times 8\times 7)\div(2\times 14)=224\div 28=8.$

অথবা, $4ab\div 2c=\dfrac{4ab}{2c}=\dfrac{4\times 8\times 7}{2\times 14}=8.$

উদা. 7. $a=12,\ b=4,\ c=3$ হইলে, মান নির্ণয় কর :

(i) $a\div b\times c$ (ii) $a\div bc$

(i) $a\div b\times c$
$=12\div 4\times 3$
$=3\times 3=9.$

(ii) $a\div bc$
$=12\div(4\times 3)$
$=12\div 12=1.$

টীকা। '$a\div b\times c$' রাশিটিতে $a$-কে $b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলকে $c$ দ্বারা গুণ করা হইয়াছে; কিন্তু, '$a\div bc$' এই রাশিটিতে $a$-কে $b$ ও $c$-এর গুণফল দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে। $b\times c$ এবং $bc$ উভয় ক্ষেত্রেই $b$ ও $c$-এর গুণ সূচিত করিলেও $b\times c$ স্থলে $b$ এবং $c$-কে দুইটি পৃথক সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হয়, কিন্তু $bc$ স্থলে $b$ এবং $c$-কে পৃথক সংখ্যা বলিয়া মনে না করিয়া একটিমাত্র সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হয়।

সুতরাং যে যে সংখ্যার গুণ করণীয় তাহাদের মধ্যে গুণচিহ্ন না থাকিলে উহাদিগকে একটিমাত্র সংখ্যা বলিয়া মনে করিতে হয়।

উদা. 8. $a=4, b=8, c=6$ হইলে, $\dfrac{4a+b}{2c}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{4a+b}{2c}=\frac{(4\times 4)+8}{(2\times 6)}=\frac{24}{12}=2.$$

উদা. 9. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}$-এর মান নির্ণয় কর, যদি $a=8,\ b=12,$ $c=16$ হয়।

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{8+12}{16}+\frac{12+16}{8}+\frac{16+8}{12}$$

$$=\frac{20}{16}+\frac{28}{8}+\frac{24}{12}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+2$$

$$=\frac{5+14+8}{4}=\frac{27}{4}=6\tfrac{3}{4}.$$

উদা. 10. $x=4$, $y=6$, $z=8$ হইলে,

$6x \div 2y \times 3z + 2x \times 4z - 4y$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} & 6x \div 2y \times 3z + 2x \times 4z - 4y \\ &= (6\times4)\div(2\times6)\times(3\times8)+(2\times4)\times(4\times8)-(4\times6) \\ &= 24 \div 12 \times 24 + 8 \times 32 - 24 \\ &= 2 \times 24 + 256 - 24 \\ &= 48 + 256 - 24 \\ &= 304 - 24 = 280. \end{aligned}$$

## প্রশ্নমালা 2

$a=6$, $b=4$, $c=3$, $d=2$, ধরিয়া মান নির্ণয় কর :

1. $3a$ 2. $2a+4$ 3. $3b-2$ 4. $5c+5$

5. $2a+3b$ 6. $4b-3c$ 7. $2a+3d$ 8. $3a+2b-3$

9. $a+b+c$ 10. $b+c+d$ 11. $c+d-b$ 12. $4d+3c-a$

13. $ab+bc+cd$ 14. $abc+2d-c$

15. $10ab-12bc+7cd$ 16. $2abc+3bcd+4cda$

17. $a+ab+abc+abcd$ 18. $abc-ab-ac-bc$

19. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 20. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ✗21. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

22. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ 23. $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$ 24. $\frac{1}{3c}-\frac{1}{3b}$ 25. $\frac{2}{3c}+\frac{3}{4d}$

26. $\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}$ 27. $\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}$

28. $\frac{a}{bcd}+\frac{b}{cda}+\frac{c}{abd}$ 29. $a+\frac{1}{b}$ 30. $b-\frac{1}{a}$

31. $2a+\frac{3}{b}$ 32. $3c-\frac{1}{d}$ 33. $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}-\frac{2}{c}+\frac{1}{d}$

34. $\frac{3c+2d}{2a+2b}+\frac{3c-2d}{2a-2b}$ 36. $\frac{a}{2b}+\frac{b}{3c}-\frac{c}{4d}-\frac{d}{5a}$

$x=4$, $y=3$, $z=2$ ধরিয়া মান নির্ণয় কর :

36. $\frac{3x+4y}{5z}+\frac{2x+3z}{4y}+\frac{3y-2z}{3x}$ 37. $\frac{3x+2y+z}{xyz}-\frac{3(x+y-z)}{5xyz}$

38. $x=8, y=5$ হইলে $5x$ এবং $3y$-এর সমষ্টি কত ?

39. $x=10, y=6$ হইলে, $3x$ এবং $5y$-এর অন্তর কত ?

40. $m=8, n=6, p=4$ হইলে, $mnp$ এবং $m+n+p$-এর অন্তর কত ?

41. $abc$ এবং $a \times b \times c$-এ প্রভেদ কি ? 942 এবং 9.4.2-এর প্রভেদ কি ?

---

**5. 0 ( শূন্য )-এর ব্যবহার ঃ** শূন্য সম্বন্ধে নিম্নলিখিত নিয়ম কয়টি জানা প্রয়োজন ।

(1) 0-দ্বারা একটি সংখ্যাকে বা একাধিক সংখ্যার গুণফলকে গুণ করিলে গুণফল 0 হইবে ; যথা—

(*i*) $5 \times 0 = 0, \quad 4 \times 3 \times 0 = 0$

(*ii*) $a \times 0 = 0, \quad a \times b \times 0 = 0$

(*iii*) $c = 0$ হইলে, $abc = a \times b \times 0 = 0.$

(2) 0-কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 0 হয়, যথা—

(*i*) $0 \div 2 = 0, \quad \frac{0}{3} = 0, \quad \frac{0}{5 \times 6} = 0$

(*ii*) $0 \div a = 0, \quad \frac{0}{a} = 0, \quad \frac{0}{a \times b} = 0$

(*iii*) $a = 0$ হইলে, $\frac{a}{b+c} = \frac{0}{b+c} = 0.$

(3) 0-এর যোগ-বিয়োগ দ্বারা রাশির মানের কোন পরিবর্তন হয় না ; যথা—

(*i*) $10 + 0 = 10, \quad 10 - 0 = 10$

(*ii*) $7 + 5 + 0 = 7 + 5 = 12, \quad 7 + 5 - 0 = 7 + 5 = 12$

(*iii*) $a + 0 = a, \quad a - 0 = a$

(*iv*) $2a + 3b + 0 = 2a + 3b, \quad 2a + 3b - 0 = 2a + 3b$

উদা. 1. $a = 10, b = 4, c = 0$ হইলে, $2a + 3b + 7c$-এর মান কত ?

$$2a + 3b + 7c = (2 \times 10) + (3 \times 4) + (7 \times 0)$$
$$= 20 + 12 + 0$$
$$= 20 + 12 = 32.$$

উদা. 2. $a=8, b=5, c=0$ হইলে, $4a-5b-15c$-এর মান কত?

$$4a-5b-15c=(4\times 8)-(5\times 5)-(15\times 0)$$
$$=32-25-0$$
$$=32-25=7.$$

উদা. 3. $a=3, b=4, c=0$ হইলে, $\frac{5c+2b}{2a+3b}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{5c+2b}{2a+3b}=\frac{(5\times 0)+(2\times 4)}{(2\times 3)+(3\times 4)}=\frac{0+8}{6+12}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

## প্রশ্নমালা 3

$a=8, b=5, c=0$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

1. $a+c$ 2. $b-c$ 3. $3a+4c$

4. $5b-20c$ 5. $8a+5b-7c$ 6. $3abc\div 8a$

7. $2ac-3bc+5ab$ 8. $\frac{10c}{7a+2b}$

9. $\frac{8c+2b}{4a+3c}$ 10. $\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{3c}{5b}$

---

6. চারি চিহ্ন (+, −, ×, ÷) সম্বলিত রাশিমালার সমাধান।

বহুপদবিশিষ্ট রাশিমালার সমাধান করিতে হইলে পাটীগণিতে '+, −, ×, ÷' এর কার্যগুলি যে ক্রমে করা হইয়া থাকে বীজগণিতেও সেই কার্যক্রম ( order of operation ) অবলম্বন করা হয়। কেবল + ও − চিহ্ন অথবা × ও ÷ চিহ্ন থাকিলে বাম দিক হইতে চিহ্ন-সূচিত ক্রিয়াগুলি করিয়া যাইতে হয়। আর, +, −, ×, ÷ এই চারিটি চিহ্নই বর্তমান থাকিলে, প্রথমতঃ গুণ ও ভাগের কার্য শেষ করিয়া পরে যোগ ও বিয়োগের কার্য করিতে হয়।

নৈকট্য বা একটিমাত্র সংখ্যা বুঝাইবার জন্য গুণ চিহ্ন উহ্য থাকিলে অথবা সংক্ষিপ্ত ভাগ চিহ্ন ব্যবহৃত হইলে উক্ত গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়া সর্বাগ্রে করিয়া লইতে হয়। $a\div b\times c$ ইহার অর্থ $a$-কে $b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলকে $c$ দ্বারা গুণ করিতে হইবে, কিন্তু $a\div bc$ ইহার অর্থ $b$ ও $c$-র গুণফল দ্বারা $a$-কে ভাগ করিতে হইবে।

উক্ত স্থলে, $a=10$, $b=5$, $c=3$ হইলে,

$$a\div b\times c=10\div 5\times 3=2\times 3=6.$$

$$a\div bc \quad =10\div(5\times 3)=10\div 15=\tfrac{2}{3}.$$

আবার দেখ,

$$a\div b\div c=10\div 5\div 3=2\div 3=\tfrac{2}{3}.$$

$$a\div\frac{b}{c}=10\div\tfrac{5}{3}=10\times\tfrac{3}{5}=6. \qquad \left(a\div b \text{ সংক্ষেপে } \frac{a}{b}, a/b\right)$$

উদা. 1. $a=12$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ হইলে, $2b\times c\div 3d\times 4c\div a$-এর মান কত ?

$$\begin{aligned}2b\times c\div 3d\times 4c\div a&=(2\times 2)\times 3\div(3\times 4)\times(4\times 3)\div 12\\&=4\times 3\div 12\times 12\div 12\\&=12\div 12\times 12\div 12\\&=1\times 12\div 12=12\div 12=1.\end{aligned}$$

উদা. 2. $a=12$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ হইলে,

$3a\div 2b\div c\times 5d\div 5\times d$-এর মান কত ?

$$\begin{aligned}&3a\div 2b\div c\times 5d\div 5\times d\\&=(3\times 12)\div(2\times 2)\div 3\times(5\times 4)\div 5\times 4\\&=36\div 4\div 3\times 20\div 5\times 4\\&=\frac{36\times 20\times 4}{4\times 3\times 5}=48.\end{aligned}$$

## প্রশ্নমালা 4

$a=12$, $b=6$, $c=4$, $d=2$ হইলে, মান নির্ণয় কর :

1. $a\div b\times c$ 2. $a\times b\div c$ 3. $a\div b\div c$ 4. $a\times b\div c\times d$
5. $a\div bc$ 6. $a\times b\div cd$ 7. $a\div b\div c\div d$
8. $a+b\div c$ 9. $a\div b\div c\times d$ 10. $3a\div 2b+4c\div 2d$
11. $a\div b+c\div d+2c$ 12. $3a\div 2b\times cd\div c\times d$
13. $2b\times c\div 3d\times 4c\div 2a$ 14. $4b\div 2a\times c\div 2d-4a\div 8b$

---

7. **গুণফল।** দুই বা দুই-এর অধিক সংখ্যা গুণ করিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির গুণফল ( Product ) বলা হয় এবং ঐ সংখ্যাগুলিকে গুণফলের **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** ( Factors ) বলা হয়।

$a \times b \times c = abc$

এস্থলে $abc$ গুণফল এবং $a, b, c$ উক্ত গুণফলের উৎপাদক।

$5 \times c \times d = 5cd$

এস্থলে $5cd$ গুণফল এবং $5, c, d,$ উক্ত গুণফলের উৎপাদক।

8. **সহগ** ( Co-efficient )। বীজগণিতের কোন রাশির পূর্বে কোন রাশি গুণনীয়করূপে অবস্থিত হইলে শেষোক্ত রাশিকে প্রথমোক্ত রাশির সহগ বলা হয়।

$5x = 5 \times x$, এস্থলে $5$, $x$ এর সহগ।

$ax = a \times x$, এস্থলে $a$, $x$ এর সহগ।

$5abc$, এস্থলে $abc$ এর সহগ $5$, $bc$ এর সহগ $5a$, $c$ এর সহগ $5ab$.

কোন গুণফলের যে কোন গুণনীয়ককে অবশিষ্ট গুণনীয়কগুলির গুণফলের সহগ বলা যাইতে পারে।

কোন গুণফলের উৎপাদকগুলির মধ্যে পাটীগণিতীয় সংখ্যায় প্রকাশিত উৎপাদকটিকে **সংখ্যাত্মক সহগ** ( Numerical Co-efficient ) বলে এবং বীজগণিতীয় রাশিদ্বারা প্রকাশিত সহগকে **আক্ষরিক সহগ** ( Literal Co-efficient ) বলে।

$7x$, এস্থলে $7$, $x$ এর সংখ্যাত্মক সহগ।

$ax$, এস্থলে $a$, $x$ এর আক্ষরিক সহগ।

কোন বীজগণিতের রাশির সংখ্যাত্মক সহগ 1 হইলে, 1 আর লেখা হয় না, উহা উহ্য থাকে। $x$-এর অর্থ $1x$, সুতরাং $x$-এর সহগ 1.

সুতরাং কোন বীজগণিতীয় রাশির পূর্বে সংখ্যাত্মক সহগ না থাকিলে উহার সহগ 1 ধরিয়া লইতে হইবে।

9. **ক্রমিক গুণফল**। দুই এর অধিক সংখ্যা পর পর গুণ করিলে সর্বশেষ গুণফলকে উক্ত সংখ্যাগুলির ক্রমিক গুণফল ( Continued Product ) বলা হয়।

$a \times b = ab$, $ab \times c = abc$, $abc \times d = abcd$.

এস্থলে $a, b, c,$ ও $d$ এর ক্রমিক গুণফল $abcd$.

$a, b, c$ এর গুণফলকে $abc, acb, bca, cab$ ইত্যাদি যে কোন ক্রমে লেখা যায়, কিন্তু বর্ণমালার ক্রম অনুসারে লেখাই সাধারণ রীতি।

## 10. ঘাত বা শক্তি ( Power ) ও সূচক ( Index or Exponent )

কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারাই একাধিকবার গুণ করিলে যে গুণফল হয় তাহাকে উক্ত রাশিটির ঘাত বা শক্তি বলা হয়।

$a \times a$, $a$-র একটি ঘাত ;

$a \times a \times a$, $a$-র একটি ঘাত ;

$b \times b \times b \times b$, $b$-এর একটি ঘাত ; ইত্যাদি।

$a \times a$ গুণফলটি হইল $a$-র দ্বিঘাত বা বর্গ।

$a \times a \times a$ গুণফলটি হইল $a$-র ত্রিঘাত বা ঘন।

$a \times a \times a \times a$ গুণফলটি হইল $a$-র চতুর্ঘাত, ইত্যাদি।

$a \times a$ গুণফলটিকে সংক্ষেপে $a^2$,

$a \times a \times a$ গুণফলটিকে সংক্ষেপে $a^3$,

$a \times a \times a \times a$ গুণফলটিকে সংক্ষেপে $a^4$ এই ভাবে লেখা হয়।

কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা কতবার গুণ করা হইল তাহা সূচিত করিবার জন্য রাশিটির মাথায় গুণনের বারসূচক সংখ্যাটি লেখা হয়। ঐ সংখ্যাটকে ঘাতের সূচক বলা হয়। $a^2, a^3, a^4, a^5$ প্রভৃতি স্থলে 2, 3, 4, 5 প্রভৃতি $a$ এই রাশিটির দ্বিঘাত, ত্রিঘাত, চতুর্ঘাত, পঞ্চঘাত প্রভৃতির সূচক।

যে কোন রাশি সেই রাশির এক ঘাত। অর্থাৎ $a = a^1$, $3 = 3^1$, ইত্যাদি। কিন্তু ঐ সূচক 1 উহ্য থাকে।

পার্থক্যগুলি লক্ষ্য কর—

$x^2 = x.x$ কিন্তু $2x = 2 \times x$

$x^3 = x.x.x$ কিন্তু $3x = 3 \times x$

$x^4 = x.x.x.x$ কিন্তু $4x = 4 \times x$, ইত্যাদি।

$x = 3$ হইলে,

$x^3 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ কিন্তু $3x = 3 \times 3 = 9$

$x^4 = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ কিন্তু $4x = 4 \times 3 = 12$

দ্রষ্টব্য। 1-এর যে কোন ঘাত 1 ; $1^2 = 1, 1^3 = 1, 1^5 = 1, 1^n = 1$ ইত্যাদি।

**11. মূল (Root).**

কোন রাশিকে উহার যে কোন ঘাতের মূল বলা হয়।

$a$-কে $a^2$ এর দ্বিতীয় মূল বা বর্গমূল (Second root or Square root),

$a^3$ এর তৃতীয় মূল বা ঘনমূল (Third root or Cube root),

$a^4$ এর চতুর্থ মূল (Fourth root),

$a^5$ এর পঞ্চম মূল (Fifth root), ইত্যাদি বলা হয়।

**12. মূল চিহ্ন (Radical Sign)**—কোন রাশির বাম দিকে '$\surd$' এইরূপ একটি চিহ্ন দ্বারা বর্গমূল প্রকাশ করা হয়। $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ ইত্যাদি চিহ্নদ্বারা যথাক্রমে ঘন মূল, চতুর্থ মূল, পঞ্চম মূল ইত্যাদি প্রকাশ করা হয়।

তদ্রূপ $\sqrt[n]{}$ দ্বারা $n$-তম মূল প্রকাশ করা হয়।

একাধিক পদবিশিষ্ট সংখ্যাকে মূল চিহ্নের অন্তর্ভুক্ত করিবার জন্য প্রথম বন্ধনী অথবা রেখা বন্ধনী ব্যবহার করা হয়, যথা—

$\surd(x+y)$ বা $\sqrt{x+y}$ এর অর্থ $x$ এবং $y$ দুইটি রাশির সমষ্টি করিয়া প্রাপ্ত সমষ্টির বর্গমূল করিতে হইবে।

পার্থক্যগুলি লক্ষ্য কর: $(a=9,\ b=4)$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{9\times4} = \sqrt{36}=6$$
$$\surd a.b = \surd a\times b = \surd 9\times 4=3\times4=12$$
$$\begin{cases}\sqrt{a+b} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\\ \surd(a+b) = \surd(9+4) = \sqrt{13}\end{cases}$$
$$\surd a+b = \surd 9+4 = 3+4=7$$
$$\surd 25 = \surd(25) = \sqrt{25}=5.$$

দ্রষ্টব্য। (1) পাটীগণিতের সংখ্যা দুই বা ততোধিক অঙ্কযুক্ত হইলেও মূল বুঝাইবার জন্য বন্ধনীর প্রয়োজন হয় না, $\surd 625=25$,

(2) 1-এর যে কোন মূলই 1; $\surd 1=1$, $\sqrt[5]{1}=1$, $\sqrt[n]{1}=1$, ইত্যাদি।

উদা. 1. $a=1, b=2, c=3, d=4$ হইলে $3a^3b^2c^3d^2$-এর মান নির্ণয় কর।

$$3a^3b^2c^3d^2 = 3.1^3.2^2.3^3.4^2$$
$$=3\,.\,1\,.\,4\,.\,27\,.\,16$$
$$=5184.$$

উদা. 2. $5\sqrt{xy}$-এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=16$ এবং $y=9$.

$$5\sqrt{xy}=5\sqrt{16.9}=5\sqrt{144}=5\times12=60.$$

উদা. 3. $3\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-3\sqrt{b}$-এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=25$ এবং $b=16$.

$$3\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-3\sqrt{b}=3\sqrt{25.16}-3\sqrt{25}-3\sqrt{16}$$
$$=3.20-3.5-3.4$$
$$=60-15-12=60-27=33.$$

উদা. 4. $\sqrt{15ab^3c^4}$-এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=3$, $b=5$ এবং $c=2$.

$$\sqrt{15ab^3c^4}=\sqrt{15.3.5^3.2^4}$$
$$=\sqrt{5.3.3.5.5^2.4^2}$$
$$=\sqrt{5^2.3^2.5^2.4^2}$$
$$=5.3.5.4$$
$$=300.$$

## প্রশ্নমালা 5

মান নির্ণয় কর : ( $a=2, b=3, c=5$ )

1. $2a^3+5b^3$ 2. $4ab^2-2b^3$ 3. $a^2b^2c^2+a^2b-ab^2-bc^2$
4. $2ac^2+2cb^3$ 5. $a^3b^3c^3-a^2b-ab^2-bc^3$
6. $a+2b^2+3c^3+4c^4$

মান নির্ণয় কর : ( $x=16, y=4$ )

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 8. $\sqrt{xy}$ 9. $\sqrt{x}.y$ 10. $5\sqrt{x}-3\sqrt{y}$
11. $\sqrt{x+12y}$ 12. $\sqrt{x}+12y$ 13. $\sqrt{x^2y^4}$
14. $\sqrt{xy+9y}$

$a=16$, $b=36$ ধরিয়া মান নির্ণয় কর :

15. (*i*) $\sqrt{4a+b}$ (*ii*) $\sqrt{4a}+b$ (*iii*) $4\sqrt{a}+b$
16. $x=5$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $6x^2-32x+10=0$.
17. $y=x^2+2x+1$ হইলে $y$ এর মান কত হইবে, যখন $x=1, 2, 3, 4$ ?

18. প্রমাণ কর যে $x$-এর মান 5 অথবা 7 হইলে, $x^2 - 12x + 35$ এর মান অভিন্ন।

19. $a = 2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $4a^3 - 15a^2 + 17a = 6$.

20. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ধরিয়া মান নির্ণয় কর:

(i) $a^b$ (ii) $b^a$ (iii) $a^{2b-c}$ (iv) $c^{2a-b}$ (v) $8^{a+b-c}$

---

**13. মাত্রা এবং মাত্রা-মান।**

$a^2 = a \times a$, এস্থলে প্রত্যেকটি $a$ এক একটি মাত্রা এবং $a^2$-এর মাত্রা মান 2.

$abc = a \times b \times c$, এস্থলে $a$, $b$, $c$-এর প্রত্যেকেই এক একটি মাত্রা এবং $abc$-এর মাত্রা-মান 3.

$a^2b^3x = a \times a \times b \times b \times b \times x$, এস্থলে, $a$, $b$, $x$-এর প্রত্যেকটি এক একটি মাত্রা এবং $a^2b^3x$-এর মাত্রা-মান হইল 6.

যতগুলি অক্ষর গুন করিয়া একটি গুণফল উৎপন্ন হয় তাহাদের প্রত্যেকটি এক একটি মাত্রা ( Dimension ) এবং অক্ষর-সমষ্টির সংখ্যা উক্ত গুণফলের মাত্রা-মান ( Degree ). সুতরাং কোন গুণফলের প্রত্যেক আক্ষরিক উৎপাদকের ঘাতের সূচকসমষ্টিই গুণফলের মাত্রা-মান। $a^2b^3x$-এর $a$, $b$ এবং $x$-এর সূচক-সমষ্টি $2 + 3 + 1 = 6$, সুতরাং $a^2 b^3x$-এর মাত্রা-মান 6.

সংখ্যাত্মক সহগ দ্বারা বীজগণিতীয় রাশির মাত্রা-মানের কোন তারতম্য হয় না। $x^3$ এবং $5x^3$ উভয় রাশিরই মাত্রা-মান 3.

$y$, $a^2$, $a^3$, $a^4$ ইত্যাদিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ মানের রাশি বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। এস্থলে 'মান' কথাটি একটি বিশেষ অর্থে ব্যবহৃত হইয়াছে।

## প্রশ্নমালা 6
### ( মৌখিক )

মাত্রা-মান নির্ণয় কর:

1. $x$ 2. $3x$ 3. $x^2y$ 4. $abc$ 5. $3a^2b^3c^4$ 6. $27xyz^3$
7. $4abxy$ 8. $a^2b^3x^2y^3$ 9. $5a^4b^5c^3d^7$ 10. $12a^3b^2p^5q^{10}$

---

14. রাশিমালা ও পদ ( Expression and Term )।

কোন সংখ্যা বা সংখ্যাবোধক অক্ষর অথবা যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ প্রক্রিয়াবোধক চিহ্নসম্বলিত সংখ্যা ও সংখ্যাজ্ঞাপক প্রতীকের সার্থক সমবায়কে বীজগণিতীয় রাশিমালা ( Algebraic expression ) বা সংক্ষেপে রাশি ( Expression ) বলে।

$a+b$, $a-2b$, $2a-3b+4c\times 5b\div a$ ইহাদের প্রত্যেকেই এক একটি রাশি। রাশিমালার অন্তর্গত যোগ ও বিয়োগ চিহ্নদ্বারা যুক্ত অক্ষর বা অক্ষরসমূহকে উহার পদ ( Term ) বলে। গুণ ও ভাগ চিহ্নদ্বারা যুক্ত অক্ষর বা অক্ষরসমূহকে একটিমাত্র পদ বলিয়া গণ্য করা হয়।

$2a-3b+4c\times 5b\div a$ এই রাশিমালার $2a$, $3b$, $4c\times 5b\div a$ এই তিনটি পদ।

15. এক-পদ ও বহু-পদ রাশি।

যে রাশিতে একটিমাত্র পদ থাকে তাহাকে **এক-পদ রাশি** ( Monomial expression ) অথবা **সরল রাশি** ( Simple expression ) বলে, যথা—

$x$, $2a$, $5a\div 2b$

যে রাশিতে একাধিক পদ থাকে তাহাকে **বহু-পদ রাশি** ( Polynomial, multinomial or compound expression ) বলে, যথা—

$x+y$, $2x+3y-5z$, $a+3b\div 2c-5b+4d$

যে রাশিতে দুইটি মাত্র পদ থাকে তাহাকে **দ্বিপদ রাশি** ( Binomial expression ) বলে, যথা—

$a+b$, $3a-4c$, $a\div 2b+5c\times 2a$

যে রাশিতে তিনটি মাত্র পদ থাকে তাহাকে **ত্রিপদ রাশি** ( Trinomial expression ) বলে, যথা—

$2a+5b-4c$

তিনের অধিক পদবিশিষ্ট রাশিকে সাধারণতঃ বহু-পদ রাশি বলা হয়, যথা—

$2a+4b-4c+2a\times b-3c\div d$

16. কোন বৈজিক রাশিমালার সকল পদেরই মাত্রা-মান সমান হইলে উহাকে **সমমাত্র রাশিমালা** ( Homogeneous expression ) বলে। যথা,

$a^4-2a^3b+3a^2b^2-4ab^3+b^4$ রাশিমালাটি সমমাত্র, যেহেতু ইহার সকল পদের মাত্রা-মান 4.

**17. সদৃশ ও অসদৃশ পদ।** দুইটি পদের সংখ্যাত্মক সহগ ভিন্ন অন্য কোন প্রভেদ না থাকিলে উহাদিগকে পরস্পর **সদৃশ** ( Like ) পদ বলা হয়; কিন্তু সংখ্যাত্মক সহগ অভিন্ন থাকা সত্ত্বেও বৈজিক প্রতীকে প্রভেদ হইলে তাহাদিগকে পরস্পর **অসদৃশ** ( Unlike ) পদ বলা হয়।

$5a$, $7a$ পরস্পর সদৃশ পদ। $2x, 2y$ পরস্পর অসদৃশ পদ।
$xy$, $3xy$ পরস্পর সদৃশ পদ। $5x$, $5y$ পরস্পর অসদৃশ পদ।

দুইটি সদৃশ পদ যুক্ত বা বিযুক্ত হইয়া তৃতীয় একটি সদৃশ পদে পরিণত হয়। যথা: $3x+2x=5x$, এস্থলে $3x$, $2x$, $5x$ পদ তিনটি পরস্পর সদৃশ।

দুইটি অসদৃশ পদ যুক্ত বা বিযুক্ত হইয়া একটি রাশিমালা উৎপন্ন করে; যথা— $5x$ এবং $3y$ যুক্ত হইয়া এবং বিযুক্ত হইয়া যথাক্রমে $5x+3y$ এবং $5x-3y$ এই দুইটি রাশিমালা উৎপন্ন করে।

**18. বন্ধনীর ব্যবহার।** পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও বন্ধনী-চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। রাশিমালার এক অংশ হইতে অপর অংশকে পৃথক্ করার জন্য বন্ধনী-চিহ্ন ব্যবহৃত হইয়া থাকে। বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিকে একটিমাত্র পদ বলিয়া গণ্য করিতে হয়। $(a+b)c$ ইহার অর্থ, $a$ ও $b$-এর সমষ্টিকে $c$ দ্বারা গুণ করিতে হইবে। $a+bc$, ইহার অর্থ $a$-র সহিত $b$ ও $c$-র গুণফল যোগ করিতে হইবে।

$a=2$, $b=3$, $c=4$ হইলে,

$$(a+b)c=(2+3)4=5.4=20.$$
$$a+bc \quad =2+(3.4)=2+12=14.$$

**19.** বন্ধনী তিন প্রকার। **প্রথম বন্ধনী** বা **লঘু বন্ধনী** ( First brackets or parentheses ), ইহার চিহ্ন ( ) এইরূপ, **দ্বিতীয় বন্ধনী** বা **ধনুর্বন্ধনী** ( Second brackets or braces ) ইহার চিহ্ন { } এইরূপ, এবং **তৃতীয় বন্ধনী** বা **গুরুবন্ধনী** ( Third brackets or square brackets ) ইহার চিহ্ন [ ] এইরূপ।

এই তিনটির অধিক বন্ধনীর প্রয়োজন হইলে দুই বা ততোধিক সংখ্যার উপর ——— এইরূপ একটি রেখা টানা হয়। ইহাকে **রেখা বন্ধনী** (Vinculum) বলে।

পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও রেখা-বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনীর কার্য করিতে হয়।

উদা. 1. $a-(b-c)$-এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=8$, $b=5$, $c=2$.

$$\begin{aligned} & a-(b-c) \\ &=8-(5-2) \\ &=8-3 \\ &=5. \end{aligned}$$

উদা. 2. $a+\{2a-(b+2c)\}$-এর মান নির্ণয় কর যখন $a=8$, $b=5$, $c=2$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &=8+\{(2\times 8)-(5+\overline{2\times 2})\} \\ &=8+\{16-(5+4)\} \\ &=8+\{16-9\} \\ &=8+7 \\ &=15. \end{aligned}$$

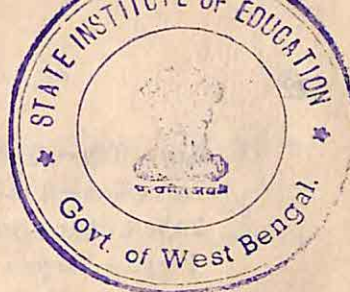
উদা. 3. $a-[b-\{3c-(a-\overline{b+c})\}]$-এর মান নির্ণয় কর,

যখন, $a=8$, $b=5$, $c=2$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &=8-[5-\{(3\times 2)-(8-\overline{5+2})\}] \\ &=8-[5-\{6-(8-7)\}] \\ &=8-[5-\{6-1\}] \\ &=8-[5-5] \\ &=8-0 \\ &=8. \end{aligned}$$

## প্রশ্নমালা 7

সরল কর : $(a=12, b=8, c=6, d=2)$

1. $2a-(b-c+d)$
2. $3c-\{a-(b+d)\}$
3. $(2a-d)-\{3c-(a-b-d)\}$
4. $a-[a-\{a-(a-\overline{a-b})\}]$
5. $3a+[2b-\{3c-(b-\overline{4d-c})\}]$
6. $\{a-(b-c)\}+\{b-(c-d)\}$
7. $3a-[4b-\{2c+(5b-\overline{2a+c})\}]$
8. $4\times(3a-6d)-3\times[3b-\{(3a-2c)-(4b-3c)\}-(c-a+2b)]$

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## ধনরাশি ঘটিত প্রথম চারি নিয়ম (সহজ)

1. সমস্ত রাশি ধনাত্মক কল্পনা করিলে পাটীগণিতের প্রথম চারি নিয়ম সংক্রান্ত সমস্ত মৌলিক নিয়ম বীজগণিতের প্রথম চারি নিয়মেও প্রযোজ্য হইবে।

### যোগ

2. **অসদৃশ পদের যোগ।** একাধিক অসদৃশ পদের সমষ্টি করিয়া ঐ পদ-গুলির কোন একটির আকারে যোগফল প্রকাশ করা যায় না। দুই দুইটি পদের মধ্যে মাত্র যোগ চিহ্ন দিয়া উহাদের সমষ্টি প্রকাশ করিতে হয়। সমজাতীয় রাশিতে পরিণত করা না হইলে, 9 মিটার, 6 ডেসিমিটার, 4 সেন্টিমিটার এই তিনটি অসদৃশ রাশির সমষ্টি 9 মিটার 6 ডেসিমিটার 4 সেন্টিমিটার (অর্থাৎ 9 মিটার + 6 ডেসি-মিটার + 4 সেন্টিমিটার) এই ভাবেই প্রকাশ করিতে হয়। সেইরূপ $a$, $b$, $c$-র সমষ্টি প্রকাশ করিতে হইলে $a+b+c$ এই ভাবেই লিখিতে হয়, $a$, $b$ অথবা $c$ কোনটির আকারেই যোগফল লেখা যায় না।

তদ্রূপ, $2a$, $3b$, $4c$ এর সমষ্টি $= 2a+3b+4c.$

$5x$, $9y$, $6z$ এর সমষ্টি $= 5x+9y+6z.$

$6ab$, $8xy$ $5pq$ এর সমষ্টি $= 6ab+8xy+5pq.$

3. **সদৃশ পদের যোগ।** 10 টাকার সহিত 5 টাকা যোগ করিলে $(10+5)$ টাকা বা 15 টাকা হয়। 5 খানি বই আর 3 খানি বই একত্রে $(5+3)$ বই বা 8 খানি বই হয়। এইরূপে, $10x+5x=(10+5)x=15x$ ; $5b+3b=(5+3)b=8b$ ; $3x^2+7x^2=(3+7)x^2=10x^2$ ; ইত্যাদি।

সুতরাং একাধিক সদৃশ পদের সমষ্টি নির্ণয় করিলে যোগফলে সমস্ত পদের সাংখ্য সহগগুলির সমষ্টি হইবে বৈজিক প্রতীকের সহগ, যথা—

$$2a+3a=(2+3)a=5a.$$

$$7b+9b=(7+9)b=16b.$$

$5xy+6xy=(5+6)xy=11xy.$
$2ab+5ab+10ab=(2+5+10)ab=17ab.$
$7abc+5abc+8abc=(7+5+8)abc=20abc.$
$12xyz+15xyz+23xyz=(12+15+23)xyz=50xyz.$
$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\,a=\frac{5}{6}a.$

## প্রশ্নমালা 8

যোগ কর :

1. $a, 2b$ 2. $3a, 4c$ 3. $2x, 5y$ 4. $5x, 2x$
5. $4x, 3b$ 6. $5y, 7d$ 7. $12a, 7y$ 8. $9c, 10z$
9. $ab, cd$ 10. $2bc, 3cd$ 11. $5xy, pq$ 12. $3abc, 4xyz$

যোগফল নির্ণয় কর :

13. $a+4a$ 14. $6a+9a$ 15. $4b+5b$
16. $7c+11c$ 17. $5x+9x$ 18. $8y+12y$
19. $9z+11z$ 20. $12p+18p$ 21. $3ab+7ab$
22. $8xy+10xy$ 23. $18zx+22zx$ 24. $7pq+23pq$
25. $9abc+7abc$ 26. $xyz+7xyz$ 27. $16a^2+24a^2$
28. $12x^2y^2+28x^2y^2$ 29. $2a+4a+17a+27a$
30. $4a^2+7a^2+12a^2+41a^2$ 31. $3ab+6ab+9ab+12ab$
32. $4xy+6xy+8xy+10xy$ 33. $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}a^2$
34. $\frac{1}{3}xy+\frac{2}{3}xy+\frac{4}{5}xy+1\frac{1}{5}xy.$

---

**4. মিশ্র বা বহুপদ রাশির যোগ।**

(1) বহুপদ রাশির সমস্ত পদ পরস্পর অসদৃশ হইলে যোজ্য রাশিগুলি যোগচিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করিলেই প্রাপ্ত রাশি নির্ণেয় যোগফল হইবে।

উদা. 1. $a+b$ এবং $c+d$ এর সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=a+b+c+d.$

উদা. 2. $2a+3b$, $3c+4d+5$ এর সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=2a+3b+3c+4d+5.$

(2) পরস্পর সদৃশ পদ বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা সমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে যোজ্য রাশিমালা সমূহের সদৃশ পদগুলির সমষ্টি নির্ণয় করিয়া পূর্ব নিয়মে প্রাপ্ত সমষ্টিগুলিকে পুনরায় যোজ্য রাশি মনে করিয়া উহাদের যোগফল নির্ণয় করিবে। বাম দিক হইতে প্রক্রিয়া আরম্ভ করাই সুবিধাজনক।

উদা. 3. $2a+3b+5c$, $4a+5b+c$, $a+7b+9c$এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমষ্টি $=(2a+4a+a)+(3b+5b+7b)+(5c+c+9c)$

$=(2+4+1)a+(3+5+7)b+(5+1+9)c$

$=7a+15b+15c.$

যোজ্য রাশিগুলিকে নীচে নীচে সাজাইয়াও যোগ করা যায়। যোজ্য রাশিগুলিকে এমন ভাবে একটির নীচে একটি বসাইতে হইবে যেন সদৃশ পদগুলি ঠিক একটির নীচে আর একটি বসে। তারপর উপর হইতে নীচে প্রত্যেক স্তম্ভের যোগফল যোগচিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত কর। প্রাপ্ত রাশি নির্ণেয় যোগফল।

উদা. 4. $3x+7y+2z$, $5x+y+3z$, $x+9y+z$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l} 3x+7y+2z \\ 5x+y\;\;+3z \\ \underline{\;x+9y+\;\;z} \\ (3+5+1)x+(7+1+9)y+(2+3+1)z \end{array}$$

$=9x+17y+6z=$ নির্ণেয় যোগফল।

যোজ্য রাশিসমূহের সদৃশ পদগুলি একই ক্রমে না থাকিলে উহাদিগকে একই ক্রমে সাজাইয়া লইতে হইবে। বর্ণমালার স্বাভাবিক ক্রমে পদগুলিকে সাজানই প্রচলিত রীতি। $a, b, c$ ; $x, y, z$ ; $p, q, r$ ইত্যাদি স্বাভাবিক ক্রম।

উদা. 5. $6x+9y+3z$, $5z+2x+7y$, $5y+2x+4z$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l} 6x+9y+3z=6x+9y+3z \\ 5z+2x+7y=2x+7y+5z \\ 5y+2x+4z=\underline{2x+5y+4z} \\ \qquad (6+2+2)x+(9+7+5)y+(3+5+4)z \end{array}$$

$=10x+21y+12z=$ নির্ণেয় যোগফল।

যোজ্য রাশিগুলির কতকগুলি সদৃশ এবং বাকিগুলি অসদৃশ পদ হইলে পূর্ব নিয়মে সদৃশ ও অসদৃশ পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় করিয়া প্রাপ্ত সমষ্টিগুলিকে যোগচিহ্ন দ্বারা

যুক্ত করিলে নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে। অসদৃশ পদগুলি ভিন্ন ভিন্ন স্তম্ভে সাজাইতে হইবে।

উদা. 6. $2a+7b$, $5a+4c$, $2b+9d$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l} 2a+7b \\ 5a \quad\quad +4c \\ \quad\quad 2b \quad\quad +9d \\ \hline (2+5)a+(7+2)b+4c+9d \end{array}$$

$=7a+9b+4c+9d=$ নির্ণেয় যোগফল।

আক্ষরিক সহগযুক্ত পদের যোগেও উক্ত নিয়ম খাটিবে।

উদা. 7. $ax+by$ এবং $cx+dy$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l} ax+by \\ cx+dy \\ \hline (a+c)x+(b+d)y \end{array}$$

$=$ নির্ণেয় যোগফল।

## প্রশ্নমালা 9

যোগফল নির্ণয় কর :

1. $a+b, c+d$ 2. $a+b, x+y$ 3. $x+y, p+q$

4. $2a+3b, 3c+4d$ 5. $2a+3x, 5y+6b$ 6. $2p+q, 4m+8n$

7. $x+2y, a+b+3$ 8. $p+2q, 3x+4y+7$

9. $5a+7b+4, 6x+7y$

10. $\begin{array}{l} 5a+9b \\ 6a+2b \\ \hline \end{array}$ 11. $\begin{array}{l} 10a+12b \\ a+8b \\ \hline \end{array}$ 12. $\begin{array}{l} 12a+b \\ a+12b \\ \hline \end{array}$ 13. $\begin{array}{l} 16a+17b \\ 12a+13b \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{l} 2a+5b+7c \\ a+7b+9c \\ 7a+b+c \\ \hline \end{array}$ 15. $\begin{array}{l} 7a+3b+c \\ 5a+10b+9c \\ 3a+b+2c \\ \hline \end{array}$ 16. $\begin{array}{l} 15a+20b+30c \\ 7a+11b+15c \\ 10a+21b+2c \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{l} x+y+z \\ 5x+9y+7z \\ 7x+3y+8z \\ \hline \end{array}$ 18. $\begin{array}{l} 8x+9y+10z \\ 5x+6y+7z \\ 10x+11y+12z \\ \hline \end{array}$ 19. $\begin{array}{l} 20x+y+17z \\ x+32y+z \\ 30x+5y+49z \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{l} 2a^2+5b^2+9c^2 \\ 7a^2+8b^2+15c^2 \\ 3a^2+b^2+c^2 \\ \hline \end{array}$ 21. $\begin{array}{l} 7xy+5yz+9zx \\ 3xy+6yz+6zx \\ 9xy+yz+zx \\ \hline \end{array}$

22. $2p^2 + 3q^3 + 4r^4$
$7p^2 + 5q^3 + 6r^4$
$10p^2 + 9q^3 + 17r^4$

23. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$
$\frac{1}{4}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c$
$\frac{3}{8}a + \frac{5}{6}b + \frac{7}{8}c$

24. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y + z$
$\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z$
$x + y + \frac{1}{6}z$

25. $ax + by + cz$
$px + qy + rz$

26. $a + b + c, \quad 5a + 6b + 7c, \quad 9a + 3b + c$

27. $7a + b + 9c, \quad 8a + 7b + c, \quad 10a + 8b + 5c$

28. $3x + 5y + 7z, \quad 7x + 2y + 3z, \quad 10x + 8y + 12z$

29. $a^2 + ab + b^2, \quad 2a^2 + 5b^2 + 3ab, \quad 9ab + 10b^2 + 8a^2$

30. $2p^2 + 3q^3 + 7r^5, \quad 4p^2 + 7q^3 + 8r^5, \quad 7p^2 + 9q^3 + r^5$

31. $c^3 + b^2 + d^4, \quad 4d^4 + 7c^3 + 2b^2, \quad 3b^2 + 11c^3 + 5d^4$

32. $a = 3, \; b = 4, \; c = 5$ হইলে, $2a + 3b + 9c$, $7a + 5b + 8c$, $11a + 12b + 3c$ এর সমষ্টির মান কত ?

33. $A = x + 2y + 3z, \quad B = 2x + 3y + 4z, \quad C = 5x + 6y + 7z$ হইলে, $A + B + C =$ কত ?

---

## বিয়োগ

**5. একপদ অসদৃশ ধনরাশির বিয়োগ।**

বিয়োজন হইতে বিয়োজ্যকে বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিলে যে **মিশ্র রাশি** উৎপন্ন হয় তাহা দ্বারাই দুইটি অসদৃশ একপদ রাশির বিয়োগফল সূচিত হয়।

উদা. 1. $a$ হইতে $b$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $= a - b$.

উদা. 2. $5x$ হইতে $7y$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $= 5x - 7y$.

**6. বহুপদ অসদৃশ ধনরাশির বিয়োগ।**

যদি বিয়োজন ও বিয়োজ্যের প্রত্যেকটি পদ ধনরাশি হয়, তাহা হইলে বিয়োজন হইতে বিয়োজ্যের সমস্ত পদকে বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিলে যে মিশ্র রাশি উৎপন্ন হয় তাহা দ্বারাই দুইটি অসদৃশ বহুপদ ধনরাশির বিয়োগফল সূচিত হয়।

উদা. 3. $a+b$ হইতে $c+d$ বিয়োগ কর।

$$\text{নির্ণেয় বিয়োগফল} = (a+b)-(c+d)$$
$$= a+b-c-d.$$

উদা. 4. $2x+5y$ হইতে $5p+7q$ বিয়োগ কর।

$$\text{নির্ণেয় বিয়োগফল} = (2x+5y)-(5p+7q)$$
$$= 2x+5y-5p-7q.$$

**7. একপদ সদৃশ ধনরাশির বিয়োগ।**

একপদ সদৃশ ধনরাশির যোগে যেমন সাংখ্য সহগগুলির যোগফল বৈজিক প্রতীকের সহগরূপে লিখিলে নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়, বিয়োগেও তদ্রূপ বিয়োজনের সহগ হইতে বিয়োজ্যের সহগ বিয়োগ করিয়া প্রাপ্ত বিয়োগফলকে বৈজিক প্রতীকের সহগরূপে যুক্ত করিলেই নির্ণেয় বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 5. $5a$ হইতে $3a$ বিয়োগ কর।

$$5a-3a=(5-3)a=2a.$$

উদা. 6. $12xy$ হইতে $7xy$ বিয়োগ কর।

$$12xy-7xy=(12-7)xy=5xy.$$

আক্ষরিক বা মিশ্র সহগ হইলেও উক্ত নিয়ম খাটিবে।

উদা. 7. $ax$ হইতে $bx$ বিয়োগ কর।

এস্থলে $a$ ও $b$ আক্ষরিক সহগ।

$$\therefore\ ax-bx=(a-b)x.$$

উদা 8. $9abx$ হইতে $3abx$ বিয়োগ কর।

এস্থলে $9ab$ ও $3ab$, $x$-এর মিশ্র সহগ।

$$\therefore\ 9abx-3abx=(9ab-3ab)x$$
$$=6abx.$$

**8. বহুপদ ধনরাশির বিয়োগ।**

বিয়োজন ও বিয়োজ্যের প্রত্যেকটি পদ ধনরাশি হইলে পূর্বোক্ত নিয়মে সদৃশের সহিত সদৃশের এবং অসদৃশের সহিত অসদৃশ পদের বিয়োগ কার্য সম্পন্ন করিতে হয়।

উদা. 9. $7a+12b$ হইতে $4a+5b$ বিয়োগ কর।

$$\begin{aligned}(7a+12b)-(4a+5b) &= (7a-4a)+(12b-5b)\\ &= (7-4)a+(12-5)b\\ &= 3a+7b.\end{aligned}$$

বিয়োজনের নীচে বিয়োজ্য লিখিয়া স্তম্ভক্রমেও বিয়োগ করা যায়। যোগের ন্যায় এস্থলেও সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে এবং অসদৃশ পদগুলি পৃথক পৃথক স্তম্ভে স্থাপন করিতে হইবে এবং একটি কসি টানিয়া তাহার নীচে বিয়োগফল লিখিতে হইবে।

$$\begin{array}{l} 7a+12b\\ 4a+5b\\ \hline (7-4)a+(12-5)b\\ =3a+7b.\end{array}$$

উদা. 10. $6a+10b+9c$ হইতে $a+6b+2d$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(6a-a)+(10b-6b)+(9c-2d)$

$=5a+4b+9c-2d.$

( স্তম্ভাকারে )

$$\begin{array}{l} 6a+10b+9c\\ a+\quad 6b\qquad +2d\\ \hline (6-1)a+(10-6)b+9c-2d\\ =5a+4b+9c-2d.\end{array}$$

দ্রষ্টব্য। একটু অভ্যাস হইলে কসির ঠিক নীচের প্রক্রিয়াটি না লিখিয়া একেবারেই উত্তর লেখা চলিতে পারে।

## প্রশ্নমালা 10

বিয়োগ কর :

1. $a$ হইতে $c$ 2. $2a$ হইতে $3b$ 3. $5c$ হইতে $4d$
4. $7x$ হইতে $9y$ 5. $2p$ হইতে $5q$ 6. $9d$ হইতে $4a$
7. $a+b+c$ হইতে $x+y+z$ 8. $2p+3q+7r$ হইতে $2a+3b$

বিয়োগফল নির্ণয় কর :

9. $11a-a$ 10. $12b-7b$ 11. $15c-12c$
12. $20x-7x$ 13. $23a^2-17a^2$ 14. $14ab-8ab$
15. $18p^3-p^3$ 16. $7abc-2abc$ 17. $16a^2bc-6a^2bc$

উপরের রাশিটি হইতে নীচের রাশিটি বিয়োগ কর :

**18.** $\begin{array}{l} 5a+7b \\ \underline{3a+2b} \end{array}$ **19.** $\begin{array}{l} 9a+3b \\ \underline{a+2b} \end{array}$ **20.** $\begin{array}{l} 15b+9c \\ \underline{8b+3c} \end{array}$

**21.** $\begin{array}{l} 12x+7y \\ \underline{7x+3y} \end{array}$ **22.** $\begin{array}{l} 21x+13y \\ \underline{16x+7y} \end{array}$ **23.** $\begin{array}{l} 14ab+13cd \\ \underline{9ab+7cd} \end{array}$

**24.** $\begin{array}{l} 9x^2+12y^2 \\ \underline{7x^2+\ \ y^2} \end{array}$ **25.** $\begin{array}{l} 16a+20b+6c \\ \underline{5a+13b+2c} \end{array}$ **26.** $\begin{array}{l} a+13b+17c \\ \underline{a+\ 7b+\ 2c} \end{array}$

**27.** $\begin{array}{l} 10a^2+7b^2+5c^2 \\ \underline{2a^2+5b^2+\ c^2} \end{array}$ **28.** $\begin{array}{l} 15x^3+16x^2+17x \\ \underline{11x^3+12x^2+13x} \end{array}$

**29.** $\begin{array}{l} 25ab+20bc+15ca \\ \underline{7ab+20bc+15ca} \end{array}$

**30.** $8a+10b+9c$ হইতে $5a+3c+2d$ বিয়োগ কর।

**31.** $12a^2+7b^2+5c^2$ হইতে $2c^2+3b^2$ বিয়োগ কর।

**32.** $8x+17y+15z$ হইতে $p+3x+2y+z$ বিয়োগ কর।

**33.** দুইটি রাশির যোগফল $7a+9b$ ; উহাদের একটি $3a+5b$ ; অপরটি কত ?

**34.** $12x+16y$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $x+y$ অবশিষ্ট থাকে ?

**35.** সপ্তম শ্রেণীতে $15x$, অষ্টম শ্রেণীতে $12y$ এবং নবম শ্রেণীতে $10z$ সংখ্যক ছাত্র ছিল ; ঐ তিন শ্রেণী হইতে যথাক্রমে $x$, $2y$ এবং $3z$ সংখ্যক ছাত্র চলিয়া গেল ; এখন ঐ তিন শ্রেণীর মোট ছাত্রসংখ্যা কত রহিল ?

---

## গুণন

**9. গুণনের বিনিময় বিধি (Commutative Law of Multiplication)**—গুণফল উহার উৎপাদক সমূহের ক্রম-নিরপেক্ষ, অর্থাৎ উৎপাদকগুলির ক্রমের পরিবর্তনে গুণফলের কোন পরিবর্তন হয় না।

$$4\times5=20, \qquad 5\times4=20$$
$$\therefore\ 4\times5=5\times4\ (=20).$$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে, $a\times b=b\times a$

$$4\times5\times6=120,\ 5\times4\times6=120,\ 6\times5\times4=120,\ 6\times4\times5=120$$
$$\therefore\ 4\times5\times6=5\times4\times6=6\times5\times4=6\times4\times5\ (=120).$$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে—

$abc = bca = acb = bac = cab = cba.$

যে কোন সংখ্যক উৎপাদকের পক্ষে উক্ত বিনিময় বিধি প্রযোজ্য হইবে।

**10. গুণনের সংযোগ বিধি (Associative Law of Multiplication)—** উৎপাদকগুলিকে যে কোন ভাবে সংঘবদ্ধ (grouped) করিয়া গুণ করিলে গুণফলের কোন তারতম্য হয় না।

$$3.4.5 = (3)(4.5) = (3.4)(5) = 60.$$

তদ্রূপ, $abcd = (ab) \times (cd)$
$= a \times (bc) \times d$
$= a \times (bcd)$
$= (abc) \times d$ ; ইত্যাদি।

$$2x \times 3y = 2.x.3.y = 2\,3.x.y = 6xy.$$

**11. গুণনে সূচক নিয়মের প্রয়োগ।**

(*i*) $2^2, 2^3, 2^4, \cdots$ ইহাদের অর্থ পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে।

$2^2 = 2 \times 2$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ইত্যাদি।

অর্থাৎ 2-কে 2 দ্বারা কতবার গুণ করা হইয়াছে সেই বার বোধক সংখ্যাটি 2-এর উপর ছোট করিয়া লেখা হইয়াছে।

$2 \times 2 = 2^{1+1} = 2^2$

$2 \times 2 \times 2 = 2^{1+1+1} = 2^3$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{1+1+1+1} = 2^4$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায়, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots 2^{1+1+1+1+1}\ldots$

এইরূপে, $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a)$
$= a \times a \times a \times a \times a$ ( গুণনের সংযোগ বিধি অনুসারে )
$= a^5 = a^{2+3}$

$$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$$

এখন, $m$ এবং $n$ অখণ্ড ধন রাশি হইলে,

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots m\text{-বার}) \times (a \times a \times a \times \cdots n\text{-বার})$

$= a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)\text{-বার}$

$= a^{m+n}$

অর্থাৎ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ইহাকেই **সূচক বিধি** (Index Law) বলা হয়।

(*ii*) উক্ত সূচক বিধিটি আরও ব্যাপকভাবে প্রকাশ করা যায়।

$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n} \times a^{p+q}$

$= a^{(m+n)+(p+q)}$

$= a^{m+n+p+q}$

সুতরাং সাধারণভাবে, $a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+q\cdots\cdots}$

উক্ত নিয়ম হইতে জানা যায় যে, একই সংখ্যার ভিন্ন ভিন্ন ঘাত পরস্পর গুণিত হইলে গুণফলে উক্ত সংখ্যাটির ঘাত হইবে বিভিন্ন ঘাতের সূচক-সমষ্টির সমান।

$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$ ($a^{3\times 5} = a^{15}$ হইবে না)

$a^4 \times a^7 \times a^{10} = a^{4+7+10} = a^{21}$ ($a^{4\times 7\times 10} = a^{280}$ হইবে না)

বিভিন্ন সংখ্যার গুণনে উক্ত নিয়ম খাটিবে না।

$3^2 \times 4^3$ স্থলে $3^{2+3}$, $4^{2+3}$, অথবা $12^{2+3}$ ইহার কোনটাই হইবে না।

$a^m \times b^n = a^m b^n$ ছাড়া অন্য কোনরূপ হইবে না।

(*iii*) সূচক বিধি অনুসারে :

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n\text{-বার}$

$= a^{m+m+m+m+\cdots n\text{-বার}}$

$= a^{m\times n} = a^{mn}$

তদ্রূপ, $(x^y)^z = x^{yz}$

$(2^2)^3 = 2^6$

$(x^2)^3$ এবং $x^2 \times x^3$ এর প্রভেদ কি ?

$(x^2)^3 = x^{2\times 3} = x^6$

কিন্তু $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$

12. একপদ রাশি দ্বারা একপদ রাশিকে গুণন।

কতিপয় একপদ রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে সাংখ্য সহগগুলির গুণন করিতে হইবে এবং সদৃশ আক্ষরিক প্রতীকগুলির সূচকসমূহের যোগ করিতে হইবে। গুণ্য ও গুণকের সাংখ্য সহগ, সদৃশ ও অসদৃশ আক্ষরিক প্রতীকগুলির গুণফলই নির্ণেয় গুণফল হইবে।

উদা. 1. $2x^2$ এবং $5x^3$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ \times 5x^3 \\ \hline (2\times 5)\,x^2.x^3 \\ =10x^{2+3} \\ =10x^5 \end{array}$$

অথবা, $2x^2 \times 5x^3$
$= 2\times 5\times x^2\times x^3$
$= 10\times x^{2+3}$
$= 10x^5.$

উদা. 2. $6a^2b^3$ কে $7a^3b^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$6a^2b^3 \times 7a^3b^2 = (6\times 7)\times(a^2\times a^3)\times(b^3\times b^2)$$
$$= 42a^{2+3}.b^{3+2}$$
$$= 42a^5b^5.$$

উদা. 3. $10a^4b^6$ কে $5b^4$ দ্বারা গুণ কর।

$$10a^4b^6 \times 5b^4 = (10\times 5).a^4.b^{6+4}$$
$$= 50a^4b^{10}.$$

উদা. 4. $8a^5b^2$ কে $4b^3c^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$8a^5b^2 \times 4b^3c^2 = (8\times 4).a^5.b^{2+3}.c^2$$
$$= 32a^5b^5c^2.$$

উদা. 5. $12a^2b^3$ কে $6c^2d^3$ দ্বারা গুণ কর।

$$12a^2b^3 \times 6c^2d^3 = (12\times 6).a^2b^3c^2d^3$$
$$= 72a^2b^3c^2d^3.$$

উদা. 6. $5a^2b^3$, $6a^3b^4$, $4ab$ এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$5a^2b^3 \times 6a^3b^4 \times 4ab$$
$$= (5\times 6\times 4)\times(a^2\times a^3\times a)\times(b^3\times b^4\times b)$$
$$= 120a^{2+3+1}.b^{3+4+1}$$
$$= 120a^6b^8.$$

(অথবা,)

$$\begin{array}{r} 5a^2b^3 \\ \times\ 6a^3b^4 \\ \hline 30a^5b^7 \\ \times\ 4ab \\ \hline 120a^6b^8 \end{array}$$

## প্রশ্নমালা 11

গুণ কর :

1. $a^5$ কে $a^7$ দ্বারা
2. $x^7$ কে $x^3$ দ্বারা
3. $2a^3b$ কে $7a^4b^3$ দ্বারা
4. $5a^7b^3$ কে $10a^3b^7$ দ্বারা
5. $4a^2b^3c^4$ কে $6a^3b^4c^5$ দ্বারা
6. $12x^5y^2$ কে $8x^4y^3$ দ্বারা
7. $9x^5y^6$ কে $8x^3y^2$ দ্বারা
8. $5a^2x^3$ কে $7ax^4$ দ্বারা
9. $7m^2n^3$ কে $8m^3n^2$ দ্বারা
10. $15mn^{10}$ কে $12m^2n^7$ দ্বারা
11. $11p^4q^5$ কে $9p^3q^6$ দ্বারা
12. $10x^5y^6z^7$ কে $12x^7y^6z^5$ দ্বারা
13. $5a^7b^5$ কে $6a^5b^7c^2$ দ্বারা
14. $9a^2b^3c^4$ কে $8b^2c^3d^3$ দ্বারা
15. $2a^2b^5c^3$ কে $c^4a^3b^2$ দ্বারা
16. $15x^2y^5z^9$ কে $7x^3y^2zp$ দ্বারা

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

17. $3ab \times 4a^2b^2 \times 5a^3b^3$
18. $2abc \times 3abc \times 4abc$
19. $5a^2b \times 6a^3b^2 \times 7a^4b^5$
20. $3a^5b^7 \times 4a^4b^6 \times 5a^{10}b^7$
21. $4xy \times 6x^3y^4 \times 5x^4y^7$
22. $5x^5y^6 \times 12x^2y^5 \times 5x^5y^{10}$
23. $3xy \times 4ab \times 6cd$
24. $5a^2b^5 \times 3b^3c^4 \times 7a^4 \times 7c^4a^3$
25. $2a^2b^5 \times 2b^2c^3 \times c^2d^3 \times 5d^2a^3$.

---

**13. গুণনের বিচ্ছেদ বিধি (Distributive Law of Multiplication)—**

$(a+b)x = (a+b) + (a+b) + (a+b) + \cdots x$ বারের সমষ্টি

$= (a + a + a + \cdots x$ বারের সমষ্টি$) + (b + b + b + \cdots x$ বারের সমষ্টি$)$

$= ax + bx$

অর্থাৎ $(a+b)x = ax + bx$

উক্ত নিয়মটিকে গুণনের বিচ্ছেদ-বিধি বলে।

সাধারণ ভাবে, $(a+b+c+d+\cdots)x$

$$= ax + bx + cx + dx + \cdots$$

উক্ত নিয়ম অবলম্বন করিয়া একপদ রাশিদ্বারা বহুপদ রাশির গুণফল নির্ণয় করা যায়।

**14. বহুপদ রাশিকে এক পদ রাশিদ্বারা গুণন।**

বহুপদ রাশিকে একপদ রাশিদ্বারা গুণ করিতে হইলে একপদ গুণক রাশিদ্বারা বহুপদ গুণ্য রাশির প্রত্যেক পদকে পৃথক্‌ভাবে গুণ করিয়া উক্ত আংশিক গুণফলগুলির সমষ্টি করিলেই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $2a^2+3b^3$ কে $5a^2b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2a^2+3b^3)\times 5a^2b = 2a^2.5a^2b+3b^3.5a^2b$$
$$=10a^4b+15a^2b^4.$$

গুণন প্রক্রিয়া নিম্ন প্রদর্শিত প্রণালীতেও করা যায়—

$$\begin{array}{l} 2a^2+3b^3 \\ 5a^2b \\ \hline 10a^4b+15a^2b^4 \end{array}$$

উদা. 2. $2a^3+3a^2b+4b^3$ কে $4a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} 2a^3+3a^2b+4b^3 \\ 4a^2b^2 \\ \hline 8a^5b^2+12a^4b^3+16a^2b^5 \end{array}$$

উদা. 3. সরল কর : $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$b(c+a)=bc+ab$$
$$c(a+b)=ac+bc$$

$\therefore\ a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$

$$=ab+ac+bc+ab+ac+bc$$
$$=(ab+ab)+(ac+ac)+(bc+bc)$$
$$=2ab+2ac+2bc.$$

## প্রশ্নমালা 12

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(a+b)c$  2. $(b+c)d$  3. $(x+y)z$  4. $(p+q)r$

5. $(a+b)\times 3c$ 6. $(a+3b)\times 4c$ 7. $(2x+3y)\times 3z$ 8. $(3p+5q)\times 5r$

গুণ কর :

9. $2a+5b$ কে $3ab$ দ্বারা  10. $7a+2b$ কে $2a^2b^2$ দ্বারা

11. $a^2+ab+b^2$ কে $5ab^2$ দ্বারা  12. $bc+ca+ab$ কে $3abc$ দ্বারা

13. $a^3+a^2b+3c$ কে $7ab$ দ্বারা 14. $a^4+4a^2b^2+b^4$ কে $6ab$ দ্বারা

15. $2x^2+5xy+9y^2$ কে $3xy$ দ্বারা

16. $7x^3+5y^2+3xyz$ কে $2x^2y^2z^2$ দ্বারা

17. $5x^3+2abxy+6y^3$ কে $2abxy$ দ্বারা

18. $p^2+5pq+q^2$ কে $9pq$ দ্বারা।

সরল কর :

19. $(2a+5b)x+(7a+2b)x+(5a+b)x$

20. $ab(3x+7y)+2ab(x+9y)+3ab(2x+y)$

---

## 15. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশিদ্বারা গুণন।

পূর্বেই প্রমাণিত হইয়াছে $a+b)x=ax+bx$

এখন, মনে কর $x=c+d$,

তাহা হইলে, $(a+b)x=(a+b)(c+d)$

$$\therefore\ (a+b)(c+d)=(a+b)x$$
$$=ax+bx$$
$$=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

আবার, $(a+b+c+\cdots\cdots)x=ax+bx+cx+\cdots\cdots$

এখন, $x=p+q$ হইলে,

$$(a+b+c+\cdots)(p+q)=a(p+q)+b(p+q)+c(p+q)+\cdots$$
$$=ap+aq+bp+bq+cp+cq+\cdots$$

উক্ত নিয়মটি বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করিয়া বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশিদ্বারা গুণনের নিয়ম পাওয়া যায়। একটি বহুপদ রাশিকে অপর একটি বহুপদ রাশিদ্বারা গুণ করিতে হইলে একটির সমস্ত পদকে অপরটির সমস্ত পদদ্বারা পৃথক ভাবে গুণ করিতে হয়। এই আংশিক গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিই নির্ণেয় গুণফল।

উদা. 1. $2a+7b$ কে $3a+2b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2a+7b)(3a+2b)=(2a+7b)\times 3a+(2a+7b)\times 2b$$
$$=6a^2+21ab+4ab+14b^2=6a^2+(21ab+4ab)+14b^2$$
$$=6a^2+25ab+14b^2.$$

রাশি দুইটি উপরে নীচে বসাইয়াও গুণ করা যায়। প্রত্যেক পদের আংশিক গুণফলের সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে রাখিয়া উহাদের যোগফল নির্ণয় কর। প্রাপ্ত যোগফলই নির্ণেয় গুণফল হইবে।

উদা. 2. $5x+3y$ কে $x+2y$ দ্বারা গুণ কর।

$5x+3y$
$x+2y$
$5x^2+3xy$ ...$x$ দ্বারা $5x+3y$ কে গুণ করিয়া,
$10xy+6y^2$...$2y$ দ্বারা $5x+3y$ কে গুণ করিয়া,
$5x^2+13xy+6y^2$...আংশিক গুণফলের সমষ্টি = নির্ণেয় গুণফল।

উদা. 3. $2a^2+3ab+4b^2$ কে $3a+5b$ দ্বারা গুণ কর।

$2a^2+3ab+4b^2$
$3a+5b$
$6a^3+9a^2b+12ab^2 = (2a^2+3ab+4b^2)\times 3a$
$10a^2b+15ab^2+20b^2 = (2a^2+3ab+4b^2)\times 5b$
$6a^3+19a^2b+27ab^2+20b^3$ = নির্ণেয় গুণফল।

উদা. 4. $x^2+xy+y^2$ কে $2x+3$ দ্বারা গুণ কর।

$x^2+xy+y^2$
$2x+3$
$2x^3+2x^2y+2xy^2 = (x^2+xy+y^2)\times 2x$
$+3x^2+3xy+3y^2 = (x^2+xy+y^2)\times 3$
$2x^3+2x^2y+2xy^2+3x^2+3xy+3y^2$ = নির্ণেয় গুণফল।

## 16. মিশ্ররাশির আক্ষরিক ক্রম।

যদি কোন মিশ্ররাশির পদসমূহ একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাতযুক্ত হয় এবং সর্বাধিক ঘাতযুক্ত পদটি বামে বসাইয়া নিম্নতর ঘাতযুক্ত পদগুলি ক্রমশঃ ডানদিকে বসাইয়া যাওয়া হয় এবং ধ্রুবক সংখ্যাটি সর্বদক্ষিণে বসান হয়, তাহা হইলে উক্ত রাশিমালা সংশ্লিষ্ট অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজান হইল বলা হয়। $x^4+3x^3+5x^2+6x+7$ এই রাশিমালাটি $x$ এর অধঃক্রমে (arranged according to descending power of $x$) সাজান। ($7=7.x^0$; কারণ $x^0=1$ ইহা পরে জানিতে পারিবে)।

উক্ত রাশিমালাটিকে উল্টাভাবে লিখিলে উহা $x$-এর উর্ধ্বক্রমে সাজান হইল বলা যায়। ইহাতে $x$-এর সর্বনিম্ন ঘাতযুক্ত পদটি সর্ববামে বসিবে এবং বৃহত্তর ঘাতযুক্ত পদগুলি ক্রমশঃ পরপর বসিবে। $7(=7x^0)+6x+5x^2+3x^3+x^4$, এস্থলে রাশিমালাটি $x$-এর উর্ধ্বক্রমে ( arranged according to ascending power of $x$ ) সাজান বলা যায়।

গুণনের পূর্বে রাশি দুইটিকে উহাদের যে কোন একটি সাধারণ অক্ষরের একই ক্রমে সাজাইয়া লওয়া সুবিধাজনক।

উদা. 5. $2x^3+5+3x+4x^2$ কে $2+x$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} 2x^3+4x^2+3x+5 \\ x+2 \\ \hline 2x^4+4x^3+3x^2+5x \\ \qquad 4x^3+8x^2+6x+10 \\ \hline 2x^4+8x^3+11x^2+11x+10 \end{array}$$

উদা. 6. $2x+3y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$2x+3y$ এর বর্গ $=(2x+3y)(2x+3y)$

$$\begin{array}{l} 2x+3y \\ 2x+3y \\ \hline 4x^2+6xy \\ \qquad 6xy+9y^2 \\ \hline 4x^2+12xy+9y^2 \end{array}$$

## প্রশ্নমালা 13

গুণ কর :

1. $a+3$ কে $a+2$ দ্বারা
2. $a+5$ কে $a+4$ দ্বারা
3. $2a+1$ কে $a+3$ দ্বারা
4. $3a+2$ কে $2a+1$ দ্বারা
5. $x+5$ কে $2x+1$ দ্বারা
6. $2x+3$ কে $x+7$ দ্বারা
7. $3x+2$ কে $x+3$ দ্বারা
8. $5x+4$ কে $2x+5$ দ্বারা
9. $3a+2b$ কে $2a+3b$ দ্বারা
10. $4a+3b$ কে $a+4b$ দ্বারা

11. $a^2+3ab+b^2$ কে $2a+b$ দ্বারা 12. $x^2+x+3$ কে $2x+1$ দ্বারা
13. $2x^2+5x+4$ কে $2x+3$ দ্বারা 14. $x^2+3xy+y^2$ কে $x+y$ দ্বারা
15. $5x^2+6xy+7y^2$ কে $2x+3y$ দ্বারা
16. $3p^2+pq+q^2$ কে $2p+q$ দ্বারা

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

17. $3a+2b$ 18. $2a+5b$ 19. $a+7b$
20. $x+2y$ 21. $3x+5y$ 22. $p+3q$
23. $a+b+c$ 24. $x+2y+3z$ 25. $p+q+r$

সরল কর :

26. $(x+y)(y+z)$ 27. $(a+b)(a^2+b^2)$
28. $(a+b)(b+c)(c+a)$ 29. $(3x^2+2x+5)(2+x)$
30. $(a^4+2+3a^2)(2+3a^2)$

---

## ভাগ

17. যদি $a \div b = c$ হয়, তাহা হইলে $a$ অর্থাৎ যে রাশিকে ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজ্য** ( Dividend ) বলে, $b$ অর্থাৎ যাহার দ্বারা ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজক** ( Divisor ) বলে এবং $c$, অর্থাৎ $a$ কে $b$ দ্বারা ভাগ করিয়া যে ফল হয় তাহাকে **ভাগফল** ( Quotient ) বলে।

কোন কোন স্থলে ভাগ-ক্রিয়া সম্পূর্ণ এবং কোন কোন স্থলে অসম্পূর্ণ। ভাগের পর কিছু অবশিষ্ট না থাকিলে তাহাকে সম্পূর্ণ ( Exact ) ভাগ-ক্রিয়া এবং ভাগের পর কিছু ভাগশেষ বা অবশিষ্ট থাকিলে তাহাকে অসম্পূর্ণ ( Inexact ) ভাগ-ক্রিয়া বলা হয়।

$24 \div 6 = 4$, এস্থলে ভাগ-ক্রিয়া সম্পূর্ণ।

সম্পূর্ণ ভাগস্থলে ভাজ্য, ভাজক ও ভাগফলের সম্বন্ধ নিম্নরূপ :

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল। যেমন উক্ত উদাহরণে $24 = 6 \times 4$.

30-কে 7 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 4 হয় এবং অবশিষ্ট 2 থাকে। এস্থলে, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

যেমন $30 \div 7$ ; এস্থলে $30 = 7 \times 4 + 2$

এস্থলে আপাততঃ সম্পূর্ণ ভাগেরই আলোচনা করা হইবে।

দ্রষ্টব্য। $a \div b, \frac{a}{b}, a/b$ এই তিনটির প্রত্যেকটিতেই $a$ কে $b$ দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে বুঝায়।

## 18. ভাগে সূচক নিয়মের প্রয়োগ।

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2$$

অর্থাৎ, $a^4 \div a^2 = a^2$

আবার, $a^{4-2} = a^2$

$\therefore \; a^4 \div a^2 = a^{4-2} = a^2.$

এইরূপ,

$$x^6 \div x^3 = \frac{x^6}{x^3} = \frac{x.x\,x.x.x.x}{x.x.x} = x.x.x = x^3$$

আবার, $x^{6-3} = x^3$

$\therefore \; x^6 \div x^3 = x^{6-3} = x^3.$

এখন, মনে কর $m$ এবং $n$ ধনরাশি এবং $m > n$ ;

তাহা হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ভাগ কার্যে উক্ত সূচক নিয়মটি বিশেষ প্রয়োজনীয়।

উক্ত নিয়মে, $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$

আবার, $a^m \div a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$

$\therefore \; a^0 = 1.$

তদ্রূপ, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1.$

$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1.$

দ্রষ্টব্য। যে কোন সংখ্যার ঘাতের সূচক 0 শূন্য হইলে উহার মান 1 হইবে।

ভাজ্য এবং ভাজক একই অক্ষরের ঘাত হইলে ভাগফল ঐ অক্ষরই হইবে ; কিন্তু উহার ঘাতের সূচক হইবে ভাজ্য ও ভাজকের ঘাতের অন্তরের সমান।

19. একপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ।

ভাজ্যের সাংখ্য সহগকে ভাজকের সাংখ্য সহগ দ্বারা ভাগ কর। পূর্বোক্ত সূচক নিয়মে ভাজ্যের অক্ষরগুলিকে ভাজকের একই অক্ষর দ্বারা ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফলগুলির গুণফলই নির্ণেয় ভাগফল।

উদা. 1. $10a^5b^3$ কে $5a^3b^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$10a^5b^3 \div 5a^3b^2 = (10 \div 5)(a^5 \div a^3)(b^3 \div b^2)$$
$$= 2a^{5-3}.b^{3-2}$$
$$= 2a^2.b^1 = 2a^2b.$$

কার্যতঃ ভাগ-ক্রিয়া নিম্নপ্রণালীতে করা হয়।

$$10a^5b^3 \div 5a^3b^2 = \frac{10.a^5}{5\,a^3}.\frac{b^3}{b^2}$$
$$= 2.a^{5-3}.b^{3-2}$$
$$= 2.a^2.b^1$$
$$= 2a^2b.$$

উদা. 2. $30x^7y^8z^5$ কে $6x^4y^2z$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\frac{30x^7y^8z^5}{6x^4y^2z} = \frac{30}{6}.\frac{x^7}{x^4}.\frac{y^8}{y^2}.\frac{z^5}{z}$$
$$= 5x^{7-4}.y^{8-2}.z^{5-1}$$
$$= 5.x^3.y^6.z^4$$
$$= 5x^3y^6z^4.$$

উদা. 3. $a^5b^4c^3d^2$ কে $3a^2b^3c$ দ্বারা ভাগ কর।

$$a^5b^4c^3d^2 \div 3a^2b^3c = \tfrac{1}{3}.\frac{a^5}{a^2}.\frac{b^4}{b^3}.\frac{c^3}{c}\;d^2$$
$$= \tfrac{1}{3}.a^{5-2}.b^{4-3}.c^{3-1}.d^2$$
$$= \tfrac{1}{3}a^3b^1c^2d^2 = \tfrac{1}{3}a^3bc^2d^2$$

## প্রশ্নমালা 14

ভাগফল নির্ণয় কর :

1. $a^3b^3 \div ab$ 2. $a^5b^7 \div a^3b^2$

3. $a^{10}b^7 \div a^3b^5$ 4. $6a^4b^4 \div 2a^2b^2$

5. $15a^8b^5 \div 3ab^2$
6. $36a^4b^5c^6 \div 3a^2b^3c^4$
7. $16x^5y^{10} \div 8xy^5$
8. $32x^7y \div 8x^6$
9. $49x^5y^7z^9 \div 7x^3y^5z^7$
10. $56x^2y^2z^3 \div 8x^2y^2z^2$
11. $65xy^3z^4 \div 13xy^3z^2$
12. $81x^5y^6z \div 3x^4y^5$
13. $91a^3b^5x \div 13b^2$
14. $105a^{10}b^7x^3y^4 \div 15a^7y^3$
15. $88p^5q^7r^9 \div 11q^2r^4$
16. $16m^5n^9p^{11} \div n^4p^6$
17. $28a^5x^{16}p^{11} \div 56a^2x^6p^7$
18. $20a^4b^5c^6 \div 60a^3b^4c^5$

---

**20. বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ।**

বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাজ্যের প্রত্যেক পদকে একপদ রাশি দ্বারা পূর্বোক্ত নিয়মে ভাগ করিয়া আংশিক ভাগফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইবে। লব্ধ সমষ্টিই নির্ণেয় ভাগফল হইবে।

সাধারণ ভাবে, $(a+b+c+\cdots) \div x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} + \cdots$

ইহাই ভাগে বিচ্ছেদ-বিধির প্রয়োগ।

উদা. 1. $8a^3b^3 + 12a^2b^4 + 16ab^5$ কে $2ab$ দ্বারা ভাগ কর।

$$(8a^3b^3 + 12a^2b^4 + 16ab^5) \div 2ab = \frac{8a^3b^3}{2ab} + \frac{12a^2b^4}{2ab} + \frac{16ab^5}{2ab}$$
$$= 4a^2b^2 + 6ab^3 + 8b^4.$$

উদা. 2. $6x^4y^5 + 12x^3y^6 + 3x^2y^7$ কে $6xy$ দ্বারা ভাগ কর।

$$(6x^4y^5 + 12x^3y^6 + 3x^2y^7) \div 6xy = \frac{6x^4y^5}{6xy} + \frac{12x^3y^6}{6xy} + \frac{3x^2y^7}{6xy}$$
$$= x^3y^4 + 2x^2y^5 + \frac{xy^6}{2}.$$

## প্রশ্নমালা 15

ভাগ কর:

1. $2x^2 + 4xy$ কে $2x$ দ্বারা
2. $4x^2y^2 + 6x^3y^3$ কে $2xy$ দ্বারা
3. $5a^3b^4 + 10a^2b^5$ কে $5ab$ দ্বারা
4. $8a^3x^4 + 12a^2x^3$ কে $4ax$ দ্বারা
5. $a^2bc + ab^2c + abc^2$ কে $abc$ দ্বারা
6. $6a^5b^5 + 12a^4b^4 + 18a^3b^3$ কে $6a^3b^3$ দ্বারা

7. $9a^4b^5c^6+12a^5b^4c^6+21a^6b^3c^4$ কে $3a^2b^2c^2$ দ্বারা
8. $18x^3yz+24xy^3z+6xyz^3$ কে $6xyz$ দ্বারা
9. $12p^5q^7r^9+16p^4q^8r^{10}+24p^3q^9r^{11}$ কে $4p^3q^3r^3$ দ্বারা
10. $3am^3n^4+6bm^4n^5+9cm^5n^6$ কে $3m^2n^3$ দ্বারা
11. $2a^3bc+4ab^3c+8abc^3$ কে $8abc$ দ্বারা
12. $ab^4c^5+3a^2b^5c^6+9a^3b^6c^7$ কে $3abc$ দ্বারা

---

**21. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ।**

বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগের প্রক্রিয়া অনেকাংশে পাটীগণিতে দীর্ঘ ভাগের প্রক্রিয়ার অনুরূপ। মোটামুটি ভাগের নিয়মটি এইরূপ :

(1) প্রথমতঃ ভাজ্য এবং ভাজকের কোন একটি সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশি দুইটিকে সাজাও।

(2) ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা মনে মনে ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল নির্ণেয় ভাগফলের প্রথম পদরূপে স্থাপন কর।

(3) ভাগফলের ঘরে স্থাপিত এই প্রথম পদ দ্বারা সমগ্র ভাজকটিকে গুণ কর এবং গুণফল ভাজ্যের নীচে বসাইয়া ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর।

(4) উক্ত বিয়োগফলকে ভাজ্য মনে করিয়া উহার প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল নির্ণেয় ভাগফলের প্রথম পদের সহিত যুক্ত কর; পরবর্তী প্রক্রিয়া পূর্ববৎ। ভাগশেষ শূন্য না হওয়া পর্যন্ত এইরূপ প্রক্রিয়া করিয়া যাইতে হইবে। নীচের উদাহরণে ভাগের প্রক্রিয়া আরও স্পষ্টভাবে দেখান হইতেছে।

**উদা. 1.** $12x^2+28x+15$ কে $2x+3$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} 2x+3)12x^2+28x+15(6x+5 \\ \quad\quad\;\; \underline{12x^2+18x} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; 10x+15 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{10x+15} \end{array}$$

**প্রক্রিয়া** :—এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয় রাশিই $x$এর অধঃক্রম শক্তিতে সাজান আছে। প্রথমতঃ পাটীগণিতের দীর্ঘ ভাগের পদ্ধতিতে ভাজ্য এবং ভাজককে স্থাপন করা হইয়াছে। $12x^2\div 2x=6x$. এই $6x$ ভাগফলের প্রথম পদরূপে বসাইয়া $(2x+3)\times 6x=12x^2+18x$ এই গুণফলের পদ দুইটিকে ভাজ্যের সদৃশ পদের ঠিক নীচে নীচে বসান হইল।

ভাজ্যের অনুরূপ দুইটি পদ হইতে উক্ত গুণফল বিয়োগ করিয়া বিয়োগফল $10x$ নামিল এবং উহার সহিত ভাজ্যের পদ 15 যুক্ত করা হইল। এখন $10x+15$ হইল পরবর্তী ভাজ্য। $10x \div 2x = 5$, এই 5 (+ চিহ্ন যুক্ত) ভাগফলের দ্বিতীয় পদরূপে বসাইয়া $(2x+3)\times 5 = 10x+15$ দ্বিতীয় ভাজ্যের নীচে বসাইয়া বিয়োগ করিয়া কিছুই অবশিষ্ট রহিল না। ভাজ্যেরও সমস্ত পদ নিঃশেষ হইয়া গেল। সুতরাং ভাগক্রিয়া সমাপ্ত হইল।

নির্ণেয় ভাগফল হইল $6x+5$.

উদা. 2. $6x^2+13xy+6y^2$ কে $2x+3y$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l}
2x+3y)6x^2+13xy+6y^2(3x+2y \\
\qquad 6x^2+9xy \qquad \cdots(2x+3x)\times 3x \\
\hline
\qquad\qquad 4xy+6y^2 \\
\qquad\qquad 4xy+6y^2 \cdots(2x+3y)\times 2y \\
\hline
\end{array}
$$

ভাগফল $= 3x+2y$.

ভাগফলের প্রথম পদ $= 6x^2 \div 2x = 3x$.

ভাগফলের দ্বিতীয় পদ $= 4xy \div 2x = 2y$.

উদা. 3. $3x^3+7x^2+11x+3$ কে $3x+1$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l}
3x+1)3x^3+7x^2+11x+3(x^2+2x+3 \\
\qquad 3x^3+x^2 \\
\hline
\qquad\qquad 6x^2+11x \\
\qquad\qquad 6x^2+2x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 9x+3 \\
\qquad\qquad\qquad 9x+3 \\
\hline
\end{array}
$$

ভাগফল $= x^2+2x+3$.

ভাগফলের প্রথম পদ $= 3x^3 \div 3x = x^2$.

ভাগফলের দ্বিতীয় পদ $= 6x^2 \div 3x = 2x$.

ভাগফলের তৃতীয় পদ $= 9x \div 3x = 3$.

উদা. 4. $57x+72+x^3+14x^2$ কে $3+x$ দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে ভাজ্য ও ভাজক উভয় রাশিকে একই ক্রমে সাজাইয়া লইতে হইবে।

$57x+72+x^3+14x^2 = x^3+14x^2+57x+72$ ($x$এর অধঃক্রম শক্তিতে সাজাইয়া)

$3+x = x+3$ ($x$এর অধঃক্রম শক্তিতে সাজাইয়া)

$$
\begin{array}{l}
x+3)x^3+14x^2+57x+72(x^2+11x+24 \\
\qquad x^3+3x^2 \\
\hline
\qquad\qquad 11x^2+57x \\
\qquad\qquad 11x^2+33x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 24x+72 \\
\qquad\qquad\qquad 24x+72 \\
\hline
\end{array}
$$

ভাগফল $= x^2+11x+24$.

ভাজকে দুইএর অধিক পদ থাকিলেও উক্ত নিয়ম খাটিবে।

উদা. 5. $2x^3+9x^2+13x+6$ কে $x^2+3x+2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} x^2+3x+2)\,2x^3+9x^2+13x+6\,(2x+3 \\ \qquad\qquad\quad 2x^3+6x^2+4x \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+9x+6 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+9x+6 \end{array}$$

ভাগফল $=2x+3$.

## প্রশ্নমালা 16

ভাগ কর :

1. $x^2+5x+6$ কে $x+2$ দ্বারা।
2. $x^2+4x+3$ কে $x+3$ দ্বারা।
3. $x^2+8x+15$ কে $x+5$ দ্বারা।
4. $x^2+11x+28$ কে $x+7$ দ্বারা।
5. $x^2+12x+27$ কে $x+9$ দ্বারা।
6. $x^2+19x+78$ কে $x+13$ দ্বারা।
7. $6x^2+5x+1$ কে $2x+1$ দ্বারা।
8. $9x^2+9x+2$ কে $3x+1$ দ্বারা।
9. $6x^2+23x+20$ কে $3x+4$ দ্বারা।
10. $15x^2+28x+12$ কে $5x+6$ দ্বারা।
11. $3x^3+8x^2+7x+2$ কে $3x+2$ দ্বারা।
12. $10x^3+9x^2+17x+6$ কে $5x+2$ দ্বারা।
13. $35a^2+52ab+12b^2$ কে $7a+2b$ দ্বারা।
14. $72a^2+61ab+10b^2$ কে $8a+5b$ দ্বারা।
15. $21x^3+44x^2+57x+18$ কে $7x+3$ দ্বারা।
16. $60a^3+25a^2+84a+12ab+5b+35$ কে $12a+5$ দ্বারা।
17. $6x^3+17x^2+27x+20$ কে $2x^2+3x+5$ দ্বারা।
18. $6a^3+23a^2+34a+35$ কে $3a^2+4a+7$ দ্বারা।
19. $2x^3+5x^2y+5xy^2+3y^3$ কে $x^2+xy+y^2$ দ্বারা।
20. $10x^2+5+2x+2x^4+9x^3$ কে $2x^2+1+x^3$ দ্বারা।

---

# তৃতীয় অধ্যায়

## সাধারণ ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা

**1.** পাটীগণিতে '+' এবং '−' চিহ্ন দুইটি সংখ্যার মধ্যে বসিয়া বিশেষ বিশেষ প্রক্রিয়া সূচিত করে। যেমন '$5+3$' ইহা দ্বারা 5 এর সহিত 3 যোগ করিতে হইবে এই প্রক্রিয়া নির্দেশ করিতেছে। তদ্রূপ '5—3' ইহা দ্বারা 5 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইবে এই প্রক্রিয়া নির্দেশ করিতেছে। উক্ত স্থলে + এবং − চিহ্ন দুইটি মাত্র বিশেষ বিশেষ প্রক্রিয়া সূচক, কিন্তু উহারা 5 বা 3 কোন সংখ্যারই অংশভূত নহে। উহারা সংখ্যা হইতে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন। এইরূপ চিহ্নহীন গণনামূলক সংখ্যাকে **সাধারণ সংখ্যা** ( Common Number ) বলে। এইরূপ সংখ্যা মাত্র গণনা কার্যেই ব্যবহৃত হইয়া থাকে, যেমন মানুষের হাত কয়খানি ? উত্তর 2 ; প্রত্যেক হাতে কয়টি আঙ্গুল ? উত্তর 5 ; এই ঝুড়িতে কয়টি আম ? উত্তর 75, ইত্যাদি। এস্থলে 2, 5, 75 সাধারণ সংখ্যা।

কিন্তু এইরূপ সাধারণ সংখ্যা দ্বারা সব সময় সব কিছুর অর্থ স্পষ্ট প্রতীয়মান হয় না। গতকল্য ও অদ্যকার তাপ-মাত্রার পার্থক্য $5^\circ$ ডিগ্রী। পার্থক্য এই কথা দ্বারা বিশেষ কোন অর্থ বোধ হয় না। $5^\circ$ ডিগ্রী বেশী বা কম না বলিলে তাপমাত্রা সম্বন্ধে কোন ধারণাই হয় না। $A$ ও $B$-র বয়সের পার্থক্য 5 বৎসর—ইহাতে $A$ ও $B$, কাহার বয়স বেশী কিছুই বুঝা যায় না, কিন্তু $A$ অপেক্ষা $B$-র বয়স 5 বৎসর বেশী বা $B$ অপেক্ষা $A$-র বয়স 5 বৎসর কম অর্থাৎ 5 বৎসরের সঙ্গে বেশী বা কম এইরূপ একটি বিশিষ্টার্থক শব্দ ব্যবহার না করিলে মাত্র 5 বৎসর দ্বারা $A$ ও $B$-র মধ্যে কে বড়, কে ছোট এই সম্বন্ধে প্রকৃত অর্থ বোধ হয় না।

একটি ঘড়ির ক্রয়-মূল্য ও বিক্রয়-মূল্যের তফাৎ 10 টাকা। এই কথাটি সম্পূর্ণ নিরর্থক। ইহাতে লাভ হইল কি লোকসান হইল কিছুই বুঝা যায় না। ক্রয়-মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়-মূল্য 10 টাকা বেশী বা কম এই দুইটি কথার একটি কথা 10 টাকা এই রাশিটির সহিত যুক্ত না হওয়া পর্যন্ত প্রকৃত অবস্থার যথার্থ ধারণা জন্মে না।

একখানি ট্রেন 6-টায় ছাড়ে। পূর্বাহ্ণ কি অপরাহ্ণ 6-টা না বলিলে ট্রেন ছাড়ার সময় সম্বন্ধে কোন ধারণাই জন্মে না।

এইরূপ বিশিষ্টার্থে ব্যবহৃত শুদ্ধ সংখ্যাকে **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা** ( Directed Number ) বলে।

এইরূপে হ্রাস-বৃদ্ধি, লাভ-ক্ষতি, প্রভৃতি মূলতঃ সংখ্যাবোধক হইলেও ইহারা বিপরীতার্থ বুঝাইবার জন্য সাধারণ সংখ্যার পূর্বে + ও − চিহ্ন যুক্ত করা হয় এবং ঐ চিহ্ন দুইটির যে কোন একটি যে রাশির সহিত যুক্ত হয় উহা তাহারই অবিচ্ছেদ্য অঙ্গরূপে পরিগণিত হয়। পাটীগণিতে ব্যবহৃত + ও − এর মত তখন আর উহারা বিশেষ প্রক্রিয়া সূচক নহে। প্রকৃতপক্ষে উহারা বীজগণিতীয় রাশির প্রকৃতি বোধক।

10 টাকা লাভ বুঝাইবার জন্য যদি আমরা + 10 বলি, তাহা হইলে,

10 টাকা ক্ষতি বুঝাইবার জন্য আমরা − 10 বলিব।

এইরূপ $x$-বৎসর বেশী বুঝাইবার জন্য আমরা বলি + $x$ বৎসর।

এবং $x$-বৎসর কম বুঝাইবার জন্য আমরা বলি − $x$ বৎসর।

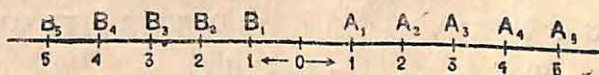
এইরূপে, বিপরীত প্রকৃতির দুইটি রাশির একটিকে + চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করিলে অপরটিকে − চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

' + ' চিহ্ন যুক্ত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে **ধন সংখ্যা** ( Positive Number ) এবং '−' চিহ্ন যুক্ত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে **ঋণ সংখ্যা** ( Negative Number ) বলা হয়।

ধনরাশিবোধক + চিহ্নটি সাধারণতঃ উহ্য থাকে, কিন্তু প্রক্রিয়াবোধক + চিহ্নটি কখনও উহ্য থাকে না। ধনরাশি ও ঋণরাশির চিহ্ন-নিরপেক্ষ মানকে উহার **পরম মান** ( Absolute value ) বলে। $+5$ এবং $-5$ উভয়ের পরম মান 5, $+x$ এবং $-x$ উভয়ের পরম মান $x$.

2. **লৈখিক চিত্রের সাহায্যে ধন ও ঋণ রাশির ধারণা।**

$B_5$ $B_4$ $B_3$ $B_2$ $B_1$ $A_1$ $A_2$ $A_3$ $A_4$ $A_5$

5 4 3 2 1 ← 0 → 1 2 3 4 5

যে কোন একটি সরলরেখা লও এবং মাঝামাঝি জায়গায় $O$ একটি বিন্দু লও।

এই $O$ বিন্দুটি হইল মূল বিন্দু ( Origin ) বা প্রারম্ভিক বিন্দু ( Starting Point ). সুবিধামত যে কোন দৈর্ঘ্যকে কিলোমিটারের একক ধরিয়া $O$ বিন্দুর ডান দিকে $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,\cdots$ প্রভৃতি বিন্দু লও এবং মনে কর $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5,\cdots$ যথাক্রমে $(+1), (+2), (+3), (+4), (+5)\cdots$ ইত্যাদি নিয়ন্ত্রিত ধনসংখ্যা প্রকাশ করিতেছে।

এইরূপে $O$ বিন্দুর বামদিকে একই মাপে $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\cdots$ প্রভৃতি বিন্দু বসাও এবং মনে কর, $OB_1, OB_2, OB_3, OB_4, OB_5,\cdots$ যথাক্রমে $(-1), (-2), (-3), (-4), (-5)$, ইত্যাদি নিয়ন্ত্রিত ঋণসংখ্যা প্রকাশ করিতেছে।

$O$ দ্বারা শূন্য সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

এখন, $OA_1=(+1)$ কিলোমিটার $\qquad OB_1=(-1)$ কিলোমিটার

$OA_2=(+2)$ কিলোমিটার $\qquad OB_2=(-2)$ কিলোমিটার

$OA_3=(+3)$ কিলোমিটার $\qquad OB_3=(-3)$ কিলোমিটার

$OA_4=(+4)$ কিলোমিটার $\qquad OB_4=(-4)$ কিলোমিটার

দৈর্ঘ্যের একক না ধরিয়া টাকার একক ধরিলে,

$OA_1=(+1)$ টাকা $\qquad OB_1=(-1)$ টাকা

$OA_2=(+2)$ টাকা $\qquad OB_2=(-2)$ টাকা, ইত্যাদি।

পাটীগণিতে 0 শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যার ব্যবহার নাই। কিন্তু বীজগণিতে 0 শূন্য অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর সংখ্যার ব্যবহার আছে। 0-বিন্দুকে শূন্য ধরা হইলে উহার ডান দিকের সংখ্যাগুলি ধনসংখ্যা এবং বাম দিকের সংখ্যাগুলি ঋণসংখ্যা। সুতরাং ধনসংখ্যা মাত্রই 0 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ঋণসংখ্যা 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। $-1, -2$, ইত্যাদি শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 0 অপেক্ষা 1 বেশী সংখ্যা $+1$, 2 বেশী সংখ্যা $+2$, 3 বেশী সংখ্যা $+3$ ইত্যাদি এবং 0 অপেক্ষা 1 কম সংখ্যা $(-1)$, 2 কম সংখ্যা $(-2)$, 3 কম সংখ্যা $(-3)$, ইত্যাদি।

সুতরাং 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাকে ঋণসংখ্যা বলা হয়।

## প্রশ্নমালা 17

প্রয়োজন মত + বা − চিহ্ন বসাও :

1. 20 টাকা লাভ, 20 টাকা ক্ষতি।
2. কলিকাতা হইতে 100 কিলোমিটার পূর্বে, 100 কিলোমিটার পশ্চিমে।
3. 12 টার 10 মিনিট পরে, 10 মিনিট পূর্বে।
4. তাপমাত্রা হিমাঙ্ক অপেক্ষা 8° বেশী, 8° কম।
5. মাসিক আয় 30 টাকা বৃদ্ধি, 30 টাকা হ্রাস।
6. সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে 1000 মিটার উচ্চে, 1000 মিটার নিম্নে।
7. গ্রীণিচের পূর্বে ও পশ্চিমে 10° দূরে $P$ ও $Q$ স্থান দুইটি অবস্থিত। গ্রীণিচ হইতে $P$ ও $Q$-র কৌণিক দূরত্ব সূচিত কর।
8. যদি লাভ হয় $x$ টাকা, উহার সমপরিমাণ ক্ষতি কত?

বীজগণিতের ভাষায় অর্থ বল :

9. লাভের পরিমাণ $(-3x)$ টাকা কম।
10. মন্দিরটি সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে $(-1000)$ মিটার নিম্নে।

---

3. **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগ।** কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়া বুঝান হইতেছে।

(1) আমার নিকট 10 টাকা ছিল, আরও 5 টাকা পিতার নিকট হইতে পাইলাম ; এখন আমার নিকট মোট কত টাকা হইল?

10 টাকা ছিল, আরও 5 টাকা পাইলাম ; সুতরাং আমার নিকট 15 টাকা হইল।

অর্থাৎ $(+10) + (+5) = (+15)$

তদ্রূপ, $(+2a) + (+a) = (+3a)$.

(2) আমার নিকট 10 টাকা ছিল, উহা হইতে 5 টাকা খরচ করিলাম। এখন আমার নিকট কত টাকা রহিল? উত্তর, 5 টাকা রহিল।

আমার নিকট রহিল $(+10)$ টাকা এবং $(-5)$ টাকা

$\therefore\ (+10) + (-5) = +5.$

তদ্রূপ, $(+5a) + (-2a) = (+3a)$.

(3) আমার 20 টাকা ধার ছিল, আবার 10 টাকা ধার করিলাম।

স্থতরাং আমার মোট ধার হইল 30 টাকা।

$\therefore\ (-20) + (-10) = (-30)$

তদ্রূপ, $(-4a) + (-2a) = (-6a)$.

(4) আমার 10 টাকা ধার ছিল, কিন্তু 5 টাকা আয় করিলাম। আমার এখন কত আছে? অবশ্যই 5 টাকা আরও ধার আছে।

$\therefore\ (-10) + (5) = (-5)$.

তদ্রূপ, $(-5a) + (+2a) = (-3a)$.

**4. স্কেলের সাহায্যে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগ।**

গ্রাফ্ বোর্ডে অথবা সাধারণ ব্ল্যাক্ বোর্ডে নিম্নপ্রদর্শিত স্কেলের মত একখানি স্কেল আঁকিয়া নিম্নোক্ত প্রক্রিয়াগুলি আলোচনা করিলে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার প্রকৃতি ও উহাদের যোগ ও বিয়োগ প্রভৃতি সম্বন্ধে ধারণা সুস্পষ্ট হইবে।

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10

(1) $(+5) + (+3) =$ কত?

0 হইতে প্রথমতঃ ডানদিকে 5 দাগ তৎপর আরও ডানদিকে 3 দাগ পর্যন্ত যাও, $(+8)$এর দাগে পৌছিলে।

স্থতরাং $(+5) + (+3) = (+8)$.

(2) $(+5) + (-3) =$ কত?

0 হইতে ডানদিকে 5 দাগ পর্যন্ত যাও, আবার তথা হইতে বামদিকে 3 দাগ ফিরিয়া আইস। এখন 0 হইতে 2 দাগ ডানদিকে পৌছিলে।

স্থতরাং $(+5) + (-3) = +2$.

(3) $(-5) + (+3) =$ কত?

0 হইতে বামদিকে $(-5)$ দাগ পর্যন্ত যাও, আবার তথা হইতে ডানদিকে 3 দাগ ফিরিয়া আইস। এখন 0 হইতে $-2$ দাগে পৌছিলে।

স্থতরাং $(-5) + (+3) = (-2)$.

(4) $(-5)+(-3) =$ কত ?

0 হইতে বামদিকে $(-5)$ দাগ পর্যন্ত যাও ; তথা হইতে আরও 3 দাগ বাম দিকে যাও। এখন 0 হইতে $-8$ দাগে পৌছিলে ।

সুতরাং $(-5)+(-3) = (-8)$.

**5. স্কেলের সাহায্যে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার বিয়োগ।**

পাটীগণিতে '8 − 3' এর উত্তর নির্ণয় করিতে হইলে যেমন মনে মনে জিজ্ঞাসা করা হয় '3 আর কত হইলে 8 হয়', অনুরূপ প্রশ্নের সাহায্যে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার বিয়োগ প্রক্রিয়া করা যায়।

−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10

**(1)** $(+8)-(+3) =$ কত ?

$(+3)$-এর সহিত কত যোগ করিলে $(+8)$ হয় ?

অর্থাৎ $(+3)$-এর দাগ হইতে কত দাগ অগ্রসর হইলে $(+8)$-এর দাগে পৌছান যায় ? ডান দিকে 5 দাগ।

$\therefore \quad (+8)-(+3) = (+5)$

**(2)** $(+8)-(-3) =$ কত ?

$(-3)$ এর সহিত কত যোগ করিলে $(+8)$ হয় ?

অর্থাৎ $(-3)$ এর দাগ হইতে $(+8)$ এর দাগ পর্যন্ত আসিতে হইলে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে ? ডান দিকে 11 দাগ।

$\therefore \quad (+8)-(-3) = (+11)$.

**(3)** $(-8)-(+3) =$ কত ?

$(+3)$ এর সহিত কত যোগ করিলে $(-8)$ হয় ?

অর্থাৎ $(+3)$ এর দাগ হইতে $(-8)$ এর দাগে আসিতে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে ? বাম দিকে 11 দাগ।

$\therefore \quad (-8)-(+3) = (-11)$.

**(4)** $(-8)-(-3) =$ কত ?

$(-3)$ এর সহিত কত যোগ করিলে $(-8)$ হয় ?

অর্থাৎ $(-3)$ এর দাগ হইতে $(-8)$ এর দাগে আসিতে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে? বাম দিকে 5 দাগ।

$$\therefore \quad (-8)-(-3)=(-5).$$

বীজগণিতে বিয়োগ প্রক্রিয়া চিহ্ন পরিবর্তন পূর্বক যোগ ছাড়া আর কিছুই নহে।

$(+8)-(+3)=(+5)$ অর্থাৎ $(+8)+(-3)=(+5)$

$(+8)-(-3)=(+11)$ " $(+8)+(+3)=(+11)$

$(-8)-(+3)=(-11)$ " $(-8)+(-3)=(-11)$

$(-8)-(-3)=(-5)$ " $(-8)+(+3)=(-5)$

## প্রশ্নমালা 18

### (মৌখিক)

**1.** কোন লোক সোমবার পূর্বদিকে $x$-কিলোমিটার গিয়া, মঙ্গলবার তথা হইতে আরও পূর্বদিকে $y$-কিলোমিটার গেল। মঙ্গলবার যাত্রাস্থল হইতে সে কত দূরে অবস্থিত?

**2.** একখানি নৌকা কোন বন্দর হইতে সকালে ছাড়িয়া 15 কিলোমিটার দূরবর্তী কোন স্থানে গিয়া বৈকালে আবার বন্দরের দিকে 10 কিলোমিটার ফিরিয়া আসিল। যে বন্দর হইতে নৌকাখানি ছাড়িয়াছিল এখন তথা হইতে উহা কতদূরে?

**3.** একজন পথিককে 10 কিলোমিটার উত্তরে যাইতে হইবে, কিন্তু ভুল করিয়া সে দক্ষিণ দিকে 4 কিলোমিটার চলিয়া গেল। এখন আর কত কিলোমিটার চলিলে সে গন্তব্যস্থানে পৌঁছাইতে পারিবে?

**4.** প্রথম সংখ্যার সহিত কত যোগ করিলে দ্বিতীয় সংখ্যা হয় বল :

(*i*) $(-6), (+6)$ (*ii*) $(+6), (-6)$

(*iii*) $(+8), (+2)$ (*iv*) $(-6), (-9)$

**5.** কত হয় বল :

(*i*) $(+7x)+(-5x)$ (*ii*) $(-9x)+(-4x)$

(*iii*) $(-3x)-(-5x)$ (*iv*) $(+10x)-(-6x)$

### 6. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার গুণন।

উপরের চিত্রটিতে একটি সোজা রেল লাইন দেখান হইতেছে। লাইনটি পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত। লাইনের উপরে $O$ একটি স্টেশন। $O$-স্টেশনের পূর্বে এবং পশ্চিমে 15 কিলোমিটার অন্তর এক একটি দাগ আছে।

মনে কর, পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক এবং মধ্যাহ্ন 12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক। এখন মনে কর একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে পশ্চিম দিক হইতে পূর্ব দিকে চলিতেছে এবং মধ্যাহ্ন 12-টার সময় উহা $O$ স্টেশনে পৌছিল।

(*i*) অপরাহ্ন 4-টার সময় ঐ ট্রেন $O$ হইতে কত দূরে থাকিবে? $O$-স্টেশনের 60 কিলোমিটার পূর্বে।

এস্থলে ট্রেনের পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক $=(+15)$ কিলোমিটার
12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক $=(+\ 4)$ ঘণ্টা
$O$ হইতে দূরত্ব $=(+60)$ কিলোমিটার।
$\therefore\ (+15)\times(+4) = (+60)$

(*ii*) উক্ত ট্রেনখানি সকাল 8-টার সময় $O$ হইতে কত দূরে ছিল? $O$-স্টেশন হইতে 60 কিলোমিটার পশ্চিমে।

এস্থলে ট্রেনের পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক $=(+15)$ কিলোমিটার।
12-টার পূর্ববর্তী সময় ঋণাত্মক $=(-\ 4)$ ঘণ্টা
$O$ হইতে দূরত্ব $=(-60)$ কিলোমিটার।
$\therefore\ (+15)\times(-4) = (-60)$

আবার মনে কর, আর একখানি ট্রেন পূর্ব হইতে পশ্চিমাভিমুখী ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে চলিতেছে এবং মধ্যাহ্ন 12-টার সময়ে উহা $O$ স্টেশনে পৌছিয়াছে।

(*iii*) অপরাহ্ন 3-টার সময় ঐ ট্রেন $O$ হইতে কত দূরে থাকিবে? $O$-স্টেশন হইতে 45 কিলোমিটার পশ্চিমে।

এস্থলে ট্রেনের পশ্চিমাভিমুখী গতি ঋণাত্মক $=(-15)$ কিলোমিটার।
12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক $=(+\ 3)$ ঘণ্টা।
$O$ হইতে দূরত্ব $=(-45)$ কিলোমিটার।
$\therefore\ (-15)\times(+3) = (-45)$.

($iv$) সকাল 9-টার সময় ঐ ট্রেন $O$ হইতে কত দূরে ছিল ? $O$-স্টেশন হইতে 45 কিলোমিটার পূর্বে।

এস্থলে ট্রেনের গতি ঋণাত্মক $= (-15)$ কিলোমিটার।
12-টার পূর্ববর্তী সময় ঋণাত্মক $= (-\ 3)$ ঘণ্টা।
$O$ হইতে দূরত্ব $= (+45)$ কিলোমিটার।

$$\therefore\ (-15) \times (-3) = (+45)$$

**7. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার ভাগ।**

'$30 \div 6$' এর ভাগফল নির্ণয় করিতে 6-কে যে সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিলে 30 হয় সেই সংখ্যাটিই নির্ণেয় ভাগফল হইবে।

যেহেতু $5 \times 6 = 30, \therefore 30 \div 6 = 5$ অর্থাৎ $(+30) \div (+6) = (+5)$ ($i$)

তদ্রূপ, $(-5) \times (-6) = (+30)\ \ \therefore\ (+30) \div (-6) = (-5)$ ($ii$)

$(-5) \times (+6) = (-30)\ \ \therefore\ (-30) \div (+6) = (-5)$ ($iii$)

$(+5) \times (-6) = (-30)\ \ \therefore\ (-30) \div (-6) = (+5)$ ($iv$)

## প্রশ্নমালা 19

মান নির্ণয় কর :

1. $(+9) \times (+8)$
2. $(-7) \times (+5)$
3. $(+6) \times (-4)$
4. $(-10) \times (-7)$
5. $(-2) \times (-3) \times (-4)$
6. $(-5) \times (+3) \times (-6)$
7. $(+15) \div (+5)$
8. $(-15) \div (+5)$
9. $(+15) \div (-5)$
10. $(-15) \div (-5)$
11. $(+12) \times (-4) \div (+8)$
12. $(-20) \times (-12) \div (-15)$
13. $(-4)^3$
14. $(-3)^4$
15. $(+2)^4 \times (-3)^3$
16. যদি $a = -3,\ b = 1,\ c = 2$ হয়,
    $3abc,\ 2a^3b,\ 3a^3b^3c^3,\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

---

# চতুর্থ অধ্যায়

## প্রথম চারি নিয়ম

### ( ধনরাশি ও ঋণরাশি ঘটিত )

### যোগ

**1. বীজগণিতীয় সমষ্টি।**

পাটীগণিতে মাত্র ধনরাশি সম্বন্ধেই আলোচনা করা হয়। উহাতে ঋণরাশির স্বতন্ত্র ব্যবহার নাই। কিন্তু বীজগণিতে ধনরাশি ও ঋণরাশি এই উভয় রাশিরই ব্যবহার আছে। মাত্র ধনরাশি নিয়াই আলোচনা হয় বলিয়া পাটীগণিতের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রক্রিয়া সীমাবদ্ধ। পক্ষান্তরে, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক রাশি সমভাবে ব্যবহৃত হয় বলিয়া বীজগণিতের যোগ-বিয়োগ-গুন-ভাগ প্রক্রিয়া ব্যাপকতর।

যোজ্য রাশিগুলির সব কয়টি ধনপদ হইলে উহাদের যোগ প্রক্রিয়া পাটীগণিতের যোগ প্রক্রিয়ারই অনুরূপ। সব কয়টি ঋণরাশি হইলে উহাদের যোগ প্রক্রিয়াও প্রায় পাটীগণিতের যোগ প্রক্রিয়ারই অনুরূপ, সমষ্টীকৃত রাশিটি একটি ঋণাত্মক সহগযুক্ত হয় এই প্রভেদ। আর যোজ্য রাশিগুলির কয়েকটি ধনাত্মক এবং কয়েকটি ঋণাত্মক হইলেও তাহাদের যোগফলকে যোগই বলা হয়। অর্থাৎ স্ব স্ব চিহ্ন সমেত সমস্ত যোজ্য রাশির যোগফলকে **বীজগণিতীয় সমষ্টি (Algebraic Sum)** বলা হয়। ভিন্ন ভিন্ন ক্ষেত্রে বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয়ের প্রণালী আলোচনা করা হইতেছে।

**2. অসদৃশ একপদ রাশির যোগ।**

যোজ্য রাশিগুলি অসদৃশ হইলে স্ব স্ব চিহ্নসমেত উহাদিগকে পাশাপাশি রাখিলেই উহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় করা হয়।

**উদা. 1.** $5x, -7y, -2z$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমষ্টি $= 5x - 7y - 2z.$

অতঃপর উক্ত সমষ্টিকে আর কোন ক্ষুদ্রতর আকারে ( Simplified form ) পরিণত করা যায় না।

### 3. সদৃশ একপদ ধনরাশির যোগ।

উক্তরূপ রাশির যোগ প্রক্রিয়া দ্বিতীয় অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এখানে মাত্র একটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 2 $a, 5a, 7a, 15a$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমষ্টি $=(1+5+7+15)a=28a.$

### 4. সদৃশ একপদ ঋণরাশির যোগ।

এইরূপ রাশির যোগ প্রক্রিয়া পূর্বোক্ত ধনরাশির যোগ প্রক্রিয়ারই অনুরূপ। এস্থলে যোগফলটি একটি ঋণরাশি হইবে এই মাত্র প্রভেদ।

উদা. 3. $-a, -5a, -7a$ $-15a$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\left.\begin{array}{l}(-a)+(-5a)+(-7a)+(-15a)\\ \text{অথবা, } -a-5a-7a-15a\end{array}\right\}\begin{array}{l}=-(1+5+7+15)a.\\ =-28a.\end{array}$$

### 5. সদৃশ একপদ ধন ও ঋণরাশির যোগ।

এস্থলে ধনপদ ও ঋণপদগুলির সহগের সমষ্টির অন্তর নির্ণয় কর। উক্ত অন্তরফল অক্ষর বা অক্ষর সমূহের বামদিকে বসাও এবং ধনসমষ্টির ও ঋণসমষ্টির মধ্যে যেটির সাংখ্যমান বৃহত্তর যোগফলের পূর্বে উহারই চিহ্ন বসাও।

উদা. 4. $5ab, -8ab, -7ab, 6ab$-এর যোগফল নির্ণয় কর।

$5+6=11, -8-7=-15$; 11 এবং 15-এর অন্তর 4

এস্থলে বৃহত্তর সংখ্যাটি ঋণচিহ্নযুক্ত,

সুতরাং নির্ণেয় যোগফল$=-4ab.$

কার্যতঃ নিম্নলিখিত প্রণালীতে যোগ করা হয়:

$$\begin{aligned}\text{নির্ণেয় যোগফল} &= (5+6-8-7)ab\\ &= (11-15)ab\\ &= -4ab.\end{aligned}$$

সদৃশ পদগুলির মধ্যে একই চিহ্নযুক্ত পদগুলিকে সদৃশ চিহ্নযুক্ত এবং পৃথক চিহ্নযুক্ত পদগুলিকে অসদৃশ চিহ্নযুক্ত পদ বলা হয়। উদা. 4-এ, $5ab$, $6ab$ অথবা $-8ab$, $-7ab$ পরস্পর সদৃশ চিহ্নযুক্ত, কিন্তু $5ab$ এবং $-8ab$ অসদৃশ চিহ্নযুক্ত।

## প্রশ্নমালা 20

যোগ কর :

1. $3a, 2b, 5c.$  2. $7a, -4b, 9c.$  3. $8x, -9y, -7z.$
4. $5a, 9a, 13a$  5. $6ab, 8ab, 10ab.$  6. $3xyz, 9xyz, 15xyz.$
7. $7abc, 13abc, 20abc.$  8. $3x^2yz, 5x^2yz, 12x^2yz.$
9. $9p^2q^3, 8p^2q^3, 14p^2q^3.$  10. $7a, -10a, 13a.$
11. $-7ab, -12ab, 20ab.$  12. $15abc, -25abc, -10abc.$
13. $12x^2yz. -20x^2yz, -2x^2yz.$  14. $9axy, -11axy, -13axy.$
15. $-x^2y^2, -15x^2y^2, -9x^2y^2$  16. $3a^2b, -5a^2b, -7a^2b.$

---

### 6. বহুপদ রাশির যোগ।

বহুপদবিশিষ্ট রাশিমালা সমূহের যোগ করিতে হইলে বিভিন্ন সদৃশ পদসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় করিতে হয় এবং প্রাপ্ত সমষ্টিগুলির পুনরায় বীজগণিতীয় সমষ্টি করিলেই যোগফল পাওয়া যায় :

উদা. 1. $5a+6b+7c,\quad -8a+3b-11c,\quad 2a-15b+2c$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমষ্টি $=(5a+6b+7c)+(-8a+3b-11c)+(2a-15b+2c)$
$=(5a-8a+2a)+(6b+3b-15b)+(7c-11c+2c)$
$=(-a)+(-6b)+(-2c)$
$=-a-6b-2c.$

রাশিগুলিকে ক্রমশ: একটির নীচে আর একটি স্থাপন করিয়াও যোগ করা যায়। এইরূপ স্থাপনে সদৃশ পদগুলি স্ব স্ব চিহ্ন সমেত একই স্তম্ভে স্থাপন করিতে হয়।

$$\begin{array}{r} 5a+\ 6b+\ 7c \\ -8a+\ 3b-11c \\ 2a-15b+\ 2c \\ \hline -\ a-\ 6b-\ 2c \end{array}$$
= নির্ণেয় যোগফল।

উদা. 2. $7x-15y+10z$, $-10x-10y-16z$, $6z+5x+25y$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r} 7x-15y+10z \\ -10x-10y-16z \\ 5x+25y+\ 6z \\ \hline 2x+\ 0\ +\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=2x$.

তৃতীয় রাশিটি স্থাপন প্রণালী লক্ষ্য কর। উপরিলিখিত রাশি দুইটির প্রত্যেক পদের নীচে তৃতীয় রাশিটির সদৃশ পদগুলির চিহ্নসমেত বসান হইয়াছে।

উদা. 3. $5ax^3-12by^2+7cz$, $10ax^3+7by^2-11cz$, $-7ax^3-8by^2-3cz$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r} 5ax^3-12by^2+\ 7cz \\ 10ax^3+\ 7by^2-11cz \\ -7ax^3-\ 8by^2-\ 3cz \\ \hline 8ax^3-13by^2-\ 7cz \end{array}$$

$=$ নির্ণেয় যোগফল।

উদা. 4. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z$, $-x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}x+y+z$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমষ্টি $=(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2})x+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1)y+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)z$

$(0).x+(2).y+(\frac{5}{4}).z=2y+\frac{5}{4}z.$

## প্রশ্নমালা 21

যোগ কর :

1. $a+b-c$, $a-b+c$.
2. $a+b$, $b-c$, $c-a$.
3. $ab-bc$, $bc-ca$, $ab+ca$.
4. $a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$.
5. $2a+3b$, $3a+b$, $-5a-4b$.
6. $x^2+y^2+z^2$, $x^2-y^2+z^2$, $x^2+y^2-z^2$.
7. $3a-5b-7c$, $-9a+7b-2c$.
8. $7a-6b+3c$, $9a+7b-8c$, $-15a+9b-5c$.
9. $5a^2-12bc-3c^2$, $7a^2+9bc+5c^2$, $12a^2+3bc-7c^2$.
10. $10p+11q+12r$, $-8p-7q-6r$, $p+r+q$.
11. $x^2+5x+6$, $9x-7-2x^2$, $7x^2-8x+2$.
12. $y^3-4y^2+3y$, $3y^3-7y-6y^2$, $5y^2-2y-7y^3$.
13. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $2a^3+5a^2b+b^3$, $a^3+b^3$.

14. $2a^3 - 7a^2 + 4a, \quad -5a + 3a^3 - 2a^2, \quad 10a^2 - 5a^3 + a.$

15. $x^4 + 3x^3 + 5, \quad 4x^3 - 7x^2 + 3x, \quad 3x^4 + 7x^2 - 3x - 5.$

16. $b^3 - 3b + 1, \quad b^3 - b^2 + 2, \quad 4b + 2b^2 - 2 - b^3.$

17. $3a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c, \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}c, \quad \frac{3}{2}a - \frac{1}{6}b - \frac{1}{2}c.$

18. $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}c^2, \quad \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}c^2, \quad 3a^2 + b^2 - \frac{1}{4}c^2.$

19. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x, \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x, \quad \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x.$

20. $x + y + z, \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \quad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$

21. যদি $a = x + 2y, \quad b = y + 2x, \quad c = 3z - 3x - 3y$ হয়, $a + b + c$-এর মান কত ?

*22. যদি $x = 3a + 2b + c, \quad y = a + 2b + 3c, \quad z = -4a - 4b - 4c$ হয়, প্রমাণ কর যে $x + y + z = 0.$

*23. $x = 8, y = 6, z = 10$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :
$(3x^2 + 4y^2 - 5z^2) + (-4x^2 - 7y^2 + 8z^2) + (2x^2 + 4y^2 - 4z^2).$

*24. যদি $x^2 = a^2 + b^2 - c^2, y^2 = b^2 + c^2 - a^2, z^2 = c^2 + a^2 - b^2$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

সরল কর :

25. $5(x - y) + 6(x + y) + 14(2x - y).$

26. $8(3x + y) + 5(2x - y) + 6(x + 3y).$

27. $2(x + 2y - z) + 3(2x + y + z) + 4(x + y + 5z).$

28. এক ব্যক্তির জানুয়ারী, ফেব্রুয়ারী ও মার্চ মাসের আয় যথাক্রমে $(3x + 5y - 2z)$-টাকা, $(5x + y + z)$-টাকা এবং $(4x + 2y + 3z)$-টাকা ; তাহার তিন মাসের মোট আয় কত টাকা ?

29. একজন পথিক তিন ঘণ্টায় যথাক্রমে $3x + y, \quad 2x + 3y, \quad 6x - 2y$ কিলোমিটার চলিল ; তিন ঘণ্টায় সে মোট কত কিলোমিটার চলিল ?

30. $A$-র নিকট আছে $(x + y + z)$-টাকা, $B$-র নিকট আছে $A$ অপেক্ষা $(2y - z)$-টাকা বেশী এবং $C$-এর নিকট আছে $B$ অপেক্ষা $(x + 2z)$-টাকা বেশী। তিনজনের মোট কত টাকা আছে ?

## বিয়োগ

### 7. বীজগণিতে বিয়োগের অর্থ।

কোন রাশি হইতে একটি ধনরাশি বিয়োগ করা আর প্রথম রাশির সহিত দ্বিতীয় রাশির সমান পরম-মান ঋণরাশি যোগ করা একই কথা, এবং কোন রাশি হইতে একটি ঋণরাশি বিয়োগ করা আর উহারই সমান পরম-মান ধনরাশি প্রথম রাশির সহিত যোগ করা একই কথা; অর্থাৎ

$a$ হইতে $(+b)$ বিয়োগ করার অর্থ $a$-র সহিত $(-b)$ যোগ করা,

$$\therefore\ a-(+b)=a+(-b)=a-b.$$

$a$ হইতে $(-b)$ বিয়োগ করার অর্থ $a$-র সহিত $(+b)$ যোগ করা,

$$\therefore\ a-(-b)=a+(+b)=a+b.$$

তদ্রূপ, $5a$ হইতে $2a$ বিয়োগ করিতে হইলে, $5a$-এর সহিত $(-2a)$ যোগ করিতে হইবে,

$$\therefore\ 5a-(+2a)=5a+(-2a)=5a-2a=3a.$$

$5a$ হইতে $-2a$ বিয়োগ করিতে হইলে, $5a$-এর সহিত $(+2a)$ যোগ করিতে হইবে,

$$\therefore\ 5a-(-2a)=5a+(+2a)=5a+2a=7a.$$

উক্ত আলোচনা হইতে বলা যাইতে পারে যে, **বিয়োজ্যের চিহ্ন পরিবর্তন পূর্বক বিয়োজনের সহিত যোগই বিয়োগ।**

সংক্ষেপতঃ (*i*) $x$ হইতে $y$ বিয়োগ করিতে হইলে $x$ এবং $-y$-এর বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে এবং (*ii*) $x$ হইতে $-y$ বিয়োগ করিতে হইলে $x$ এবং $+y(=y)$-এর বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

**উদা. 1.** $a$ হইতে $(b+c)$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=a+(-b-c)=a-b-c.$

**উদা. 2.** $a$ হইতে $(b-c)$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=a+(-b+c)=a-b+c.$

**উদা. 3.** $a$ হইতে $(-b-c)$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=a+(b+c)=a+b+c.$

উদা. 4. $3a+5b-7c$ হইতে $2a-4b+2c$ বিয়োগ কর।

$$\text{নির্ণেয় বিয়োগফল} = (3a+5b-7c)+(-2a+4b-2c)$$
$$= 3a+5b-7c-2a+4b-2c$$
$$= a+9b-9c.$$

কার্যতঃ একটি সংখ্যার নীচে আর একটি সংখ্যা রাখিয়া বিয়োগ করাই সুবিধাজনক।

$3a+5b-7c$ হইতে
বিয়োগ কর $2a-4b+2c$
বিয়োগফল $= a+9b-9c.$

অর্থাৎ $3a+5b-7c$ এর সহিত
যোগ কর $-2a+4b-2c$
বিয়োগফল $= a+9b-9c.$

পরিবর্তিত চিহ্নগুলি একটু নীচে বসাইয়া একেবারেই বিয়োগ কার্য করা যায় :

$$\begin{array}{c} 3a+5b-7c \\ 2a-4b+2c \\ -\quad +\quad - \\ \hline a+9b-9c. \end{array}$$

একটু অভ্যাস করিলে লিখিত ভাবে চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়া প্রথম প্রদর্শিত আকারেও বিয়োগ করা যায়।

উদা. 5. $\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}z$ হইতে $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{c} \frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}z \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z \\ -\quad -\quad + \end{array}$$

$$\text{নির্ণেয় বিয়োগফল} = (\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2})x-(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3})y+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5})z$$
$$= \tfrac{1}{4}x-y+\tfrac{2}{5}z.$$

উদা. 6. $ax^2+by^2-cz^2$ হইতে $px^2-qy^2+rz^2$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{c} ax^2+by^2-cz^2 \\ px^2-qy^2+rz^2 \\ -\quad +\quad - \end{array}$$

$$\text{নির্ণেয় বিয়োগফল} = (a-p)x^2+(b+q)y^2-(c+r)z^2.$$

## প্রশ্নমালা 22

প্রথম রাশি হইতে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ কর :

1. $5a-3b-2c,\quad 3a-4b-c$ 2. $3a+2b+c,\quad 4a+3b-2c$
3. $7x-4y+3z,\quad 6x-5y+2z$
4. $3x^2+2y^2-3z^2,\quad x^2+y^2-2z^2$
5. $7a^2-3b^2-2c^2,\quad 4a^2-3b^2-3c^2$
6. $3x^3-5x^2+3x+2,\quad 2x^3-5x^2+4x-2$
7. $3a^2+5ab-2b^2+3,\quad 2a^2-2ab+b^2-2$
8. $6x^2+5y^2-3z^2,\quad -3x^2+3y^2+2z^2$
9. $x^3-3x^2y+4xy^2-y^3,\quad x^3-5x^2y+4xy^2-y^3$
10. $3x^4-5x^3+6x^2+3x-2,\quad 2x^4+2x^3-7x^2+6x+3$
11. $7ab-5bc+3ca+5,\quad 4ab-3bc-4ca-7$
12. $x^3y^3-3x^2y^2+5xy-11,\quad 3x^3y^3+7x^2y^2-9xy-10$
13. $7a+3x-5y+9b,\quad 5x+2y+3b-2a$
14. $px^3+qx^2-rx-5,\quad 5+2rx-2qx^2-3px^3$
15. $3abx^2-5bcy^2+7caz^2-3abc,\quad 2abx^2+3bcy^2-3caz^2-4abc$
16. $\frac{2}{7}a^2-\frac{1}{6}b^2+\frac{1}{5}c^2+3,\quad \frac{4}{7}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{3}{10}c^2-2$
17. $x^2+\frac{1}{3}y^2-\frac{3}{4}z^2+p,\quad x^2-\frac{7}{12}y^2-\frac{3}{2}z^2+q$

সরল কর :

18. $(a^2+ab)+(b^2+bc)-(ab+bc)$
19. $(x^3+2x^2+1)-(3x^2+x-2)+(3x^2+5)$
20. $(a^3+5a^2b)-(3ab^2-b^3)+(a^2b+b^3)-(a^3+2b^3)$
21. $2a+3b-5c$ হইতে $a+b$, $b+c$ এর সমষ্টি বিয়োগ কর।
22. $3x+y+z$ হইতে $x-2y+3z$ এর বিয়োগফল $5x+9y+7z$ হইতে বিয়োগ কর।
23. $5a^2+3bc+b^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $a^2-b^2$ হয় ?
24. $5x+2y-3z$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x+y+z$ হয় ?
25. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x+y+z$ হয় ?
26. $5a^4-6b^3+3c^2-2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $b^3-1$ হয় ?

*27. যদি $a=x^2+y^2+z^2$, $b=x^2-y^2+z^2$, $c=x^2+y^2-z^2$ হয়, $a+b-c=$ কত ?

28. কোন্ রাশির সহিত $x^3 - x^2 + x + 1$ যোগ করিলে যোগফল $x + 2$ হয় ?

29. কোন দোকানদার $(5x + 3y - 7z)$-টি আম ক্রয় করিয়া $(2x - y + 2z)$-টি বিক্রয় করিল। তাহার নিকট এখন কয়টি আম রহিল ?

*30. $A$-র নিকট $(x + 2y + 3z)$-টাকা, $B$-র নিকট $(2x - y + z)$-টাকা আছে, $C$-র নিকট $A$ ও $B$ উভয়ের টাকার সমষ্টি অপেক্ষা $(x + y + z)$-টাকা কম আছে। $C$-র টাকার পরিমাণ কত ?

*31. $A$-র নিকট $(3x + 2y + 7)$-টাকা, $B$-র নিকট $(4x + y + 3)$-টাকা আছে; কে কত টাকা করিয়া খরচ করিলে প্রত্যেকের নিকট $(x + y)$-টাকা থাকিবে ?

*32. কোন যুদ্ধক্ষেত্রে $(5x + 7y + 9z)$-সংখ্যক সৈন্য যুদ্ধ করিতে গিয়াছিল। তন্মধ্যে $(2x + 5y)$-জন সৈন্য নিহত হইল, $(x + 7z)$-জন আহত হইল, এবং $(x + y + z)$-জন অসুস্থ হইয়া পড়িল। যদি $x = 8000, y = 7000$ এবং $z = 5000$ হয়, তবে কত জন সৈন্য সুস্থ শরীরে ফিরিয়া আসিল ?

## গুণন

### 8. বীজগণিতে গুণনের ব্যাপকতর ব্যাখ্যা।

পাটীগণিতে $8 \times 3$ এর অর্থ 8-কে 3 বার লইয়া যোগ করা অর্থাৎ $8 \times 3 = 8 + 8 + 8 = 24$. কিন্তু পাটীগণিতে মাত্র ধনসংখ্যারই ব্যবহার হয়, ঋণসংখ্যার ব্যবহার নাই। সুতরাং, $8 \times (-3)$ অর্থাৎ 8-কে $-3$ বার লওয়ার বিশেষ কোন অর্থ হয় না। বীজগণিতে ধন ও ঋণ উভয় প্রকার সংখ্যাই ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এইজন্য বীজগণিতে গুণনের অর্থটিকে আরও ব্যাপকতরভাবে প্রকাশ করা প্রয়োজন।

যে প্রক্রিয়ার সাহায্যে এককে অর্থাৎ 1-কে কোন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যায় পরিণত করা যায়, সেই প্রক্রিয়া অপর যে কোন সংখ্যার উপর প্রয়োগ করিয়া যে কোন দুইটি সংখ্যার গুণফল পাওয়া যায় :

$3 = 1 + 1 + 1$ ( অর্থাৎ এককের 3 বারের সমষ্টি )

$\therefore\ 8 \times 3 = 8 + 8 + 8 = 24$ ( অর্থাৎ 8 এর 3 বারের সমষ্টি )

তদ্রূপ, $(-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8) = -8 - 8 - 8$

$= -24$ ( অর্থাৎ $-8$ এর 3 বারের সমষ্টি )

আবার $-3 = -1-1-1$ ( এস্থলে এককের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া 3 বার লওয়া হইয়াছে। )

$\therefore$ $8 \times (-3) = -8-8-8 = -24$ অর্থাৎ 8 এর চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া 3 বার লওয়া হইয়াছে। )

তদ্রূপ, $(-8) \times (-3) = 8+8+8 = 24$ {অর্থাৎ $(-8)$-এর চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া 3 বার লওয়া হইয়াছে।}

রাশি দুইটি ভগ্নাংশ হইলেও উক্ত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে।

9. সুতরাং দুইটি রাশির গুণফল উহাদের পরম মানের গুণফলের **সমান, কিন্তু সদৃশচিহ্ন দুইটি রাশির গুণফল ধনরাশি ও অসদৃশচিহ্ন দুইটি রাশির গুণফল ঋণরাশি হইবে।**

সুতরাং $a$ এবং $b$, ধন, ঋণ, পূর্ণসংখ্যা, বা ভগ্নাংশ যাহাই হউক না কেন

$$(+a) \times (+b) = +ab$$
$$(+a) \times (-b) = -ab$$
$$(-a) \times (+b) = -ab$$
$$(-a) \times (-b) = +ab$$

উক্ত নিয়মে, $a \times b \times (-c) = ab \times -c = -abc.$

$$a \times (-b) \times (-c) = -ab \times -c = abc$$
$$(-a) \times (-b) \times (-c) = ab \times (-c) = -abc$$
$$(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = ab \times cd = abcd$$
$$(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a^2$$
$$(-a)^3 = (-a) \times (-a) \times (-a) = a^2 \times (-a) = -a^3$$
$$(-a)^4 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = a^2 \times a^2 = a^4$$

লক্ষ্য কর ঋণরাশির আঘাতে সূচক যুগ্ম হইলে ধনরাশি এবং অযুগ্ম হইলে ঋণরাশি উৎপন্ন করে।

$$(-a)^7 = -a^7\,; \qquad (-x)^{13} = -x^{13}\,;$$
$$(-a)^{12} = a^{12}\,; \qquad (-x)^{18} = x^{18}\,;$$

আবার দেখ $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

$\therefore$ এস্থলে $\sqrt{25} = -5$

$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$

$\therefore$ এস্থলে $\sqrt{25} = 5$

$\therefore$ $25 = (+5)^2$ অথবা $(-5)^2$

$\therefore$ $\sqrt{25} = +5$ অথবা $-5$, সংক্ষেপে $\pm 5$.

10. গুণনের সাধারণ নিয়ম পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে। এস্থলে মাত্র গুণনের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. $a^2+ab+b^2$ কে $a^2-ab+b^2$ দ্বারা গুণ কর:

$$\begin{array}{lllll}
 & a^2+ab+b^2 & & & \\
 & a^2-ab+b^2 & & & \\
\hline
 & a^4+a^3b+a^2b^2 & & & \\
 & \quad -a^3b-a^2b^2 & -ab^3 & & \\
 & \qquad\quad a^2b^2 & +ab^3 & +b^4 & \\
\hline
\text{নির্ণেয় গুণফল} = & a^4+0\ +a^2b^2 & +0 & +b^4 &
\end{array}$$

$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

উদা. 2. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ কে $a+b+c$ দ্বারা গুণ কর।

উভয় রাশিকে কোন সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম ঘাতে সাজাইয়া লইলে সুবিধা হয়। না সাজাইলেও গুণফলে কোন প্রভেদ হয় না।

মনে কর দুইটি রাশিকে $a$-এর অধঃক্রম ঘাতে সাজাইয়া গুণ করা হইল।

$$\begin{array}{ll}
 & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
 & a+b+c \\
\hline
 & a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2 \\
 & \qquad a^2b \qquad -ab^2-abc \qquad +b^3-b^2c+bc^2 \\
 & \qquad\qquad +a^2c \qquad -abc-ac^2 \qquad +b^2c-bc^2+c^3 \\
\hline
\text{নির্ণেয় গুণফল} = & a^3+0+\ 0+\ 0-3abc+0+b^3+\ 0+\ 0+c^3
\end{array}$$

$$=a^3-3abc+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

উদা. 3. $x+y$, $x-y$, $x^2+y^2$, $x^4+y^4$-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{lll}
(i)\ \ x+y & (ii)\ \ x^2-y^2 & (iii)\ \ x^4-y^4 \\
\quad\ \ x-y & \quad\ \ x^2+y^2 & \quad\ \ x^4+y^4 \\
\hline
\quad\ \ x^2+xy & \quad\ \ x^4-x^2y^2 & \quad\ \ x^8-x^4y^4 \\
\qquad\ -xy-y^2 & \qquad\quad x^2y^2-y^4 & \qquad\quad x^4y^4-y^8 \\
\hline
\quad\ \ x^2\qquad -y^2 & \quad\ \ x^4\qquad -y^4 & \quad\ \ x^8\qquad -y^8
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^8-y^8$.

## প্রশ্নমালা 23

গুণ কর :

1. $a^2+2ab+b^2$ কে $a+b$ দ্বারা। 2. $a^2-2ab+b^2$ কে $a-b$ দ্বারা।
3. $a^2+ab+b^2$ কে $a-b$ দ্বারা। 4. $a^2-ab+b^2$ কে $a+b$ দ্বারা।
5. $a^2+ab+b^2$ কে $a^2-ab+b^2$ দ্বারা।
6. $x^2+x+1$ কে $x^2-x+1$ দ্বারা
7. $3x^2-xy+y^2$ কে $3x^2+xy+y^2$ দ্বারা
8. $5x^2+3xy+2y^2$ কে $2x^2-3xy+y^2$ দ্বারা।
9. $5a^2-3ab+4b^2$ কে $3a^2-ab+2b^2$ দ্বারা।
10. $a^4+a^2+1$ কে $a^4-a^2+1$ দ্বারা।
11. $x+3y+4z$ কে $2x-4y+5z$ দ্বারা।
12. $3x^3-2x+5$ কে $2x^3+x^2-3$ দ্বারা।
13. $a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc$ কে $a-b+c$ দ্বারা।
14. $a^2-a+3$ কে $a+2b$ দ্বারা।
15. $a^3+a^2b^2+b^3$ কে $2a^3-b^2$ দ্বারা।
16. $a^3-a^2b^2+b^3$ কে $2a^2-2b^2$ দ্বারা।
17. $1-x+x^2-x^3$ কে $1+x+x^2+x^3$ দ্বারা।
18. $x^2+(a+b)x+ab$ কে $x+c$ দ্বারা।

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

19. $3ab, -6a^2b, 2b^2c^2, -3a^3b^2c$.
20. $x+a, x-a, x^2+a^2, x^4+a^4$.
21. $x+1, x+2, x+3$.
22. $x+3, x-4, x+2$.

*23. $a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2, a^4-a^2b^2+b^4$.

*24. $a+x, a^2-ax+x^2, a-x, a^2+ax+x^2$.

*25. $a-b, a^2+ab+b^2, a+b, a^2-ab+b^2$.

সরল কর :

26. $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)$.
27. $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-2a(b+c)-2bc$

## ভাগ

**11.** ভাগের সাধারণ নিয়ম পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে। ধনরাশি ও ঋণরাশির ভাগের প্রক্রিয়া অভিন্ন, প্রভেদ মাত্র চিহ্নে। ভাগ গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া। স্থতরাং গুণনের চিহ্নের নিয়ম হইতেই ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম পাওয়া যাইতে পারে।

$$(+a)\times(+b)=+ab, \therefore \frac{+ab}{+a}=+b,$$

$$(-a)\times(+b)=-ab, \therefore \frac{-ab}{-a}=+b,$$

$$(+a)\times(-b)=-ab, \therefore \frac{-ab}{+a}=-b,$$

$$(-a)\times(-b)=+ab, \therefore \frac{+ab}{-a}=-b.$$

স্থতরাং ভাগের চিহ্ন সম্বন্ধে নিয়মটি নিম্নরূপ :

**ভাজ্য ও ভাজক সদৃশ-চিহ্ন হইলে ভাগফল ধনাত্মক এবং অসদৃশ-চিহ্ন হইলে ঋণাত্মক হয়।**

উদা. **1.** ভাগফল নির্ণয় কর :

(i) $8a^2b\div 4ab$, (ii) $-8a^2b\div 4ab$,

(iii) $8a^2b\div(-4ab)$ (iv) $-8a^2b\div(-4ab)$,

(i) $\frac{8a^2b}{4ab}=2a$ (ii) $\frac{-8a^2b}{4ab}=-2a$,

(iii) $\frac{8a^2b}{-4ab}=-2a$ (iv) $\frac{-8a^2b}{-4ab}=2a$.

উদা. **2.** $16a^3b-12a^2b^2-5ab^3$ কে $4ab$ দ্বারা ভাগ কর।

নির্ণেয় ভাগফল $=\frac{16a^3b}{4ab}+\frac{-12a^2b^2}{4ab}+\frac{-5ab^3}{4ab}$

$$=4a^2+(-3ab)+\left(\frac{-5b^2}{4}\right)$$

$$=4a^2-3ab-\tfrac{5}{4}b^2.$$

উদা. 3. $x^4 + x^3 - 24x^2 - 35x + 57$ কে $x^2 + 2x - 3$ দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে উভয় রাশিই $x$-এর অধঃক্রম ঘাতে সাজান আছে।

এখন পাটীগণিতের দীর্ঘভাগ প্রক্রিয়ার ন্যায় ভাজ্য ও ভাজক স্থাপন করিয়া দ্বিতীয় অধ্যায়ে বর্ণিত ভাগের নিয়মে ভাগ কর।

$$x^2 + 2x - 3)x^4 + x^3 - 24x^2 - 35x + 57(x^2 - x - 19$$

$$\underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2}$$

$$-x^3 - 21x^2 - 35x + 57$$

$$\underline{-x^3 - 2x^2 + 3x}$$

$$-19x^2 - 38x + 57$$

$$\underline{-19x^2 - 38x + 57}$$

নির্ণেয় ভাগফল $= x^2 - x - 19$.

উদা 4. $a^5 - b^5$ কে $a - b$ দ্বারা ভাগ কর।

$$a - b)a^5 - b^5(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \text{ভাগফল}$$

$$\underline{a^5 - a^4b}$$

$$a^4b$$

$$\underline{a^4b - a^3b^2}$$

$$a^3b^2$$

$$\underline{a^3b^2 - a^2b^3}$$

$$a^2b^3$$

$$\underline{a^2b^3 - ab^4}$$

$$ab^4 - b^5$$

$$\underline{ab^4 - b^5}$$

ভাজ্যের $-b^5$ পদটিকে একেবারে শেষ স্তরে নামান হইয়াছে, কারণ ঐ স্তরেই ভাগফলের শেষ পদের সহিত ভাজক গুণিত হইয়া $b^5$ পদটি উৎপন্ন করিবার সম্ভাবনা হইয়াছে। ভাজ্য হইতে প্রত্যেক স্তরেই অবশিষ্ট পদগুলি নামাইতে হইবে এমন কোন নিয়ম নাই। প্রয়োজনমত পদগুলি নামাইলেই চলিবে।

ভাজ্য ও ভাজকের সাধারণ অক্ষরের যে কোন ক্রমে ভাগ করা যাইতে পারে। উহাতে ভাগফলের পরিবর্তন হয় না

উদা. 5. $1-2x^2+3x^4-5x^3+3x$ কে $2x+1-3x^2$ দ্বারা ভাগ কর।
উভয় রাশিকে $x$-এর উর্ধ্বগ-ক্রমে সাজাইয়া—

$$1+2x-3x^2\ )\ 1+3x-2x^2-5x^3+3x^4\ (\ 1+x-x^2 = \text{ভাগফল।}$$

$$\begin{array}{r} 1+2x-3x^2 \\ \hline x+\ x^2-5x^3 \\ x+2x^2-3x^3 \\ \hline -x^2-2x^3+3x^4 \\ -x^2-2x^3+3x^4 \\ \hline \end{array}$$

$x$-এর নিম্নগ ক্রমে সাজাইলে ভাগফলটি হইত : $-x^2+x+1$
কিন্তু $1+x-x^2$ এবং $-x^2+x+1$ অভিন্ন।

## প্রশ্নমালা 24

ভাগ কর :

1. $12a^2b^2c^2 \div (-4bc)$, $-15a^5b^4c^3 \div (-5a^2b^2c^3)$, $-36x^5y^7 \div (12x^3y^2)$.

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

2. $6a^3b^5c^7-12a^2b^2c^2-18abc^5$, $3abc$.
3. $-3x^3y+6x^4y^2-9x^5y^4-12x^2y^3$, $-3x^2y$.
4. $20a^3b^3c-30a^2b^2c^2-15abc^3-10abc$, $-5ab$.
5. $ax^3-3ax^2+5a^2$, $\frac{1}{2}a$
6. $\frac{2}{3}x^4y^2-\frac{3}{4}x^3y^3-\frac{1}{2}x^2y^4+xy^5$, $\frac{1}{3}xy^2$.
7. $x^4+4y^4$, $x^2+2xy+2y^2$.
8. $6x^4+22xy^3-8x^2y^2-11x^3y-8y^4$, $6x^2+4y^2-11xy$.
9. $a^4-10a^3b+35a^2b^2-50ab^3+24b^4$, $a^2-4ab+3b^2$.
10. $2x^4-5x^3-17x^2-2x+2$, $2x^2+3x-1$.
11. $4x^2+12xy+9y^2-25z^2$, $2x+3y+5z$.

12. $a^4-7a^2+9-4b^2+4ab,\quad a^2+a-2b-3.$

13. $x^4+6x^2a^2-4x^3a+a^4-4xa^3,\quad x^2-2xa+a^2.$

14. $a^4+2a^3+3a^2+2a+1,\quad a^2+a+1.$

15. $28x^4+13x^2y^2-xy^3+15y^4,\quad 4x^2+4xy+3y^2.$

16. $a^8-x^8,\quad a+x.$

17. $3-a^2-4a^3-14a+a^4,\quad 3+a+a^2.$

18. $6x^4-11x^3+8x^2-4x+1,\quad 3x^2-x+1.$

19. $x^2+(a+b)x+ab,\quad x+b.$

20. $x^4-\frac{4}{27}x+\frac{1}{27},\quad x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}.$

---

# পঞ্চম অধ্যায়

## বন্ধনীর ব্যবহার ও অপসারণ

**1. বন্ধনীর ব্যবহার।**

কোন রাশিমালার দুই বা ততোধিক পদকে একটিমাত্র পদের ন্যায় গণ্য করাইবার জন্য তাহাদিগকে বন্ধনী চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ করা হয়। যে পদগুলিকে বন্ধনীর মধ্যে অবদ্ধ করা হয় তাহাদের সর্ব বামের পদটির পূর্বে যোগ চিহ্ন থাকিলে, বন্ধনীর অন্তর্গত করিলে তাহাদের চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় না, কিন্তু বিয়োগ চিহ্ন থাকিলে, বিয়োগ চিহ্নটি বন্ধনীর পূর্বে রাখিয়া বন্ধনীর অন্তর্গত পদসমূহের যোগ ও বিয়োগ চিহ্নগুলি বিপরীত চিহ্নে পরিণত করিতে হয়।

উদা. 1. $a+b-c=a+(b-c)=(a+b)-c.$

উদা. 2. $a-b-c=a-(b+c)=(a-b)-c.$

উদা. 3. $a-b+c=a-(b-c)=(a-b)+c$; ইত্যাদি।

2. **বন্ধনীর অপসারণ।**

(1) কোন বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন থাকিলে উক্ত বন্ধনীর অন্তর্গত রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনীটির অপসারণ করা যায়।

(2) কোন বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীমধ্যস্থ রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনীর অপসারণ করা যায়।

(3) যে কোন ক্রম অনুসারে বন্ধনীর অপসারণ করা যায়। সাধারণতঃ রেখাবন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ প্রথম দ্বিতীয় তৃতীয় ইত্যাদি ক্রমে বন্ধনী অপসারণ করা সুবিধাজনক।

(4) দুইটি বন্ধনীর মধ্যে অথবা কোন সংখ্যা ও তাহার পরবর্তী বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহাদের মধ্যে 'এর' আছে মনে করিয়া উহাদিগকে গুণ করিতে হয়।

উদা. 4. সরল কর : $(a+b-c)-(a-b+c)$

প্রদত্ত রাশি $= a+b-c-a+b-c$

$= 2b-2c.$

উদা. 5. সরল কর : $(a+b)-\{2a-(c-a)\}$

প্রদত্ত রাশি $= a+b-\{2a-c+a\}$

$= a+b-2a+c-a$

$= b+c-2a.$

উদা. 6. সরল কর : $a-[b-\{c-\overline{a-b}\}-(a+b)+c]$

প্রদত্ত রাশি $= a-[b-\{c-a+b\}-(a+b)+c]$

$= a-[b-\{c-a+b\}-a-b+c]$

$= a-[b-c+a-b-a-b+c]$

$= a-b+c-a+b+a+b-c$

$= a+b.$

উদা. 7. সরল কর : $[a-\{6a-5(a+b)\}](a-\overline{a-2b}+c)$

প্রদত্ত রাশি $=[a-\{6a-5a-5b\}](a-a+2b+c)$

$=[a-\{a-5b\}](2b+c)$

$=[a-a+5b](2b+c)$

$=5b(2b+c)$

$=10b^2+5bc.$

উদা. 8. সরল কর : $-[-\{-(-\overline{1-a})\}]$

প্রদত্ত রাশি $=-[-\{-(-1+a)\}]$

$=-[-\{1-a\}]$

$=-[-1+a]$

$=1-a.$

## প্রশ্নমালা 25

সরল কর :

1. $(a+b)-(a-b)$ 2. $a-(b+c-d)$
3. $(x-y)+(y-z)+(z-x)+(x+y+z)$
4. $(a+b-c)-(a-b-c)-(b-c-a)-(a+b+c)$
5. $a(b+c-d)-a(b-c+d)$
6. $2x-\{y-(x-2y)\}$
7. $x-\{2y-(2y+3z)-x\}$
8. $x-[a-\{2a-(3a-\overline{4a-x})\}]$
9. $2a-3(b-c)-2\{a-2(b-c)\}$
10. $d-[b+c-\{a+b-(c+2b+a-d)\}]$
11. $5[4x-\{2y+(2x-y)-(x+y)\}]$
12. $2x-\{z-(x-y+2z)\}-[4y-\{3z+x-(4x+z-5y)\}]$
13. $3x-[a-\{2a-(4a-\overline{5a-3x})\}]$
14. $x-[-y-\{-z-(-x-\overline{y-z})-x\}-y]-z$
15. $p-[p-\{2p-3(p-q)-q\}-q]-(p-q)$

# ষষ্ঠ অধ্যায়

## সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

1. যে নিয়মটি একটি বিশেষ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য তাহা যদি অনুরূপ সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হয়, তাহা হইলে সেই নিয়মটি সংক্ষিপ্ত আকারে সাধারণভাবে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করিবার নাম বীজগণিতীয় সূত্রগঠন। এই সূত্রাবলীর সাহায্যে অঙ্ক কষিবার প্রক্রিয়া সংক্ষিপ্ত এবং ত্বরান্বিত হয় এবং অযথা পরিশ্রমের লাঘব হয়। নিম্নে কয়েকটি সহজ সূত্র ও উহাদের গঠনপ্রণালী আলোচিত হইতেছে।

2. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

অথবা, সাধারণভাবে গুণ করিয়া:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab\phantom{+b^2} \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x(x+y)+y(x+y)$$
$$=x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(p+q)^2=(p+q)(p+q)=p(p+q)+q(p+q)$$
$$=p^2+pq+pq+q^2$$
$$=p^2+2pq+q^2.$$

$$(5+3)^2=(5+3)(5+3)=5(5+3)+3(5+3)$$
$$=5^2+5.3+5.3+3^2$$
$$=5^2+2.5.3+3^2$$
$$=25+30+9=64.$$

উক্ত উদাহরণসমূহ হইতে দেখা যাইতেছে যে—

**দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ, রাশি দুইটির বর্গ এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।** উক্ত নিয়মটির বৈজিক প্রতিসূত্র :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$a$ ও $b$-র যে কোন মানেই উক্ত নিয়মটি প্রযোজ্য হইবে।

3. সূত্রটির প্রয়োগ।

উদা. 1. $(2a+3b)^2=(2a)^2+2.2a.3b+(3b)^2$
$$=4a^2+12ab+9b^2.$$

উদা. 2. $(x^3+y^3)^2=(x^3)^2+2.x^3.y^3+(y^3)^2$
$$=x^6+2x^3y^3+y^6.$$

উদা. 3. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2},$

উদা. 4. $\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2+2.\frac{p}{q}.\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}+2+\frac{q^2}{p^2},$

উদা. 5. $516^2=(500+16)^2=(500)^2+2.500.16+(16)^2$
$$=250000+16000+256=266256.$$

উদা. 6. $(a+b+c)^2=\{(a+b)+(c)\}^2$
$$=(a+b)^2+2(a+b)c+(c)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

উদা. 7. $(a+2b+5c)^2=\{(a+2b)+(5c)\}^2$
$$=(a+2b)^2+2.(a+2b).5c+(5c)^2$$
$$=a^2+4ab+4b^2+10ac+20bc+25c^2.$$

**অনুসিদ্ধান্ত।** $a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab$
$$=(a+b)^2-2ab.$$

4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ এই সূত্রটির বিপরীত প্রয়োগ— $a^2+2.a.b+b^2$ এই আকারের রাশিকে $(a+b)^2$ অর্থাৎ দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গরূপে পরিণত করা যায়।

উদা. 8. $a^4+2a^2b^2+b^4$ কে দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গরূপে প্রকাশ কর।
$$a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2)^2+2.a^2b^2+(b^2)^2$$
$$=(a^2+b^2)^2.$$

উদা. 9. $9x^2+6x+1$ কে একটি পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর।
$$9x^2+6x+1=(3x)^2+2.3x.1+(1)^2=(3x+1)^2.$$

উদা. 10. যদি $a = \cdot5$, $b = \cdot7$ হয়, $169a^2 + 130ab + 25b^2$ এর মান কত?

$$169a^2 + 130ab + 25b^2 = (13a)^2 + 2.13a.5b + (5b)^2$$
$$= (13a + 5b)^2 = (13 \times \cdot5 + 5 \times \cdot7)^2$$
$$= (6\cdot5 + 3\cdot5)^2 = 10^2 = 100.$$

উদা. 11. $a + b = 4$ এবং $ab = 3$ হইলে, দেখাও যে $a^2 + b^2 = 10$.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (4)^2 - 2.3 = 16 - 6 = 10.$$

## প্রশ্নমালা 26

সূত্রসাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

1. $a + 2b$ 2. $2a + b$ 3. $x + 2y$ 4. $2x + y$
5. $2a + 3b$ 6. $5a + 2b$ 7. $6x + y$ 8. $8x + 3y$
9. $a^2 + 2b^2$ 10. $3a^2 + 2b^2$ 11. $5x + 3a$ 12. $3y^2 + 5b^2$
13. $x + \frac{1}{x}$ 14. $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$ 15. $2xy + ab$ 16. $3a + \frac{2}{3a}$
17. $x + y + z$ 18. $2x + y + 3z$

পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর :

19. $a^2 + 6a + 9$ 20. $4x^2 + 4x + 1$ 21. $9x^2 + 6x + 1$
22. $25 + 10a + a^2$ 23. $p^2 + 4pq + 4q^2$ 24. $16a^2 + 40ab + 25b^2$
25. $9x^2 + 30xy + 25y^2$ 26. $36a^4 + 48a^2b^2 + 16b^4$
27. $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$ 28. $x^2 + \frac{4a^2}{9} + \frac{4ax}{3}$
29. $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ 30. $9x^2 + \frac{1}{9x^2} + 2$

সূত্রসাহায্যে মান নির্ণয় কর :

31. $(10 + 5)^2, (8 + 5)^2, (16 + 9)^2, (50 + 16)^2$
32. $61^2, 305^2, 1001^2, 1215^2$

সূত্রসাহায্যে মান নির্ণয় কর :

33. $49x^2 + 36y^2 + 84xy$ $[x = 6, y = 8]$
34. $64a^2 + 192ab + 144b^2$ $[a = 2, b = 7]$
35. $7\cdot23 \times 7\cdot23 + 7\cdot23 \times 5\cdot54 + 2\cdot77 \times 2\cdot77$
*36. $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হইলে, দেখাও যে, $a^2 + b^2 = 13$.
*37. $x + y = 8$ এবং $xy = 15$ হইলে, দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 34$.

5. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$
$=a(a-b)-b(a-b)$
$=a^2-ab-ab+b^2$
$=a^2-2ab+b^2.$

সাধারণভাবে গুণ করিয়া

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$(x-y)^2=(x-y)(x-y)$
$=x(x-y)-y(x-y)$
$=x^2-xy-xy+y^2$
$=x^2-2xy+y^2.$

$(p-q)^2=(p-q)(p-q)$
$=p(p-q)-q(p-q)$
$=p^2-pq-pq+q^2$
$=p^2-2pq+q^2.$

$(3a-2b)^2=(3a-2b)(3a-2b)$
$=3a(3a-2b)-2b(3a-2b)$
$=9a^2-6ab-6ab+4b^2$
$=9a^2-12ab+4b^2.$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=x\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=x^2-1-1+\frac{1}{x^2},$
$=x^2-2+\frac{1}{x^2},$

$(9-5)^2=(9-5)(9-5)$
$=9(9-5)-5(9-5)$
$=9^2-9.5-9.5+5^2$
$=9^2-2.9.5+5^2$
$=81-90+25=16.$

উক্ত উদাহরণ সমূহ হইতে দেখা যাইতেছে যে,

**দুইটি রাশির অন্তরের বর্গ, রাশি দুইটির বর্গসমষ্টি ও রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণের অন্তরের সমান।**

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$a$ ও $b$-এর যে কোন মানেই উক্ত নিয়মটি প্রযোজ্য হইবে।

6. সূত্রটির প্রয়োগ :

উদা. 1. $(x-2y)^2 \quad =(x)^2-2.x.2y+(2y)^2 \quad =x^2-4xy+4y^2.$
উদা. 2. $(3a-5b)^2 \quad =(3a)^2-2.3a.5b+(5b)^2=9a^2-30ab+25b^2$
উদা. 3. $(2a^2-3x^2)^2=(2a^2)^2-2.2a^2.3x^2+(3x^2)^2.$
$=4a^4-12a^2x^2+9x^4.$

উদা. 4. $\left(2a-\frac{1}{2a}\right)^2 = (2a)^2-2.2a.\left(\frac{1}{2a}\right)+\left(\frac{1}{2a}\right)^2=4a^2-2+\frac{1}{4a^2}$.

উদা. 5. $999^2=(1000-1)^2=(1000)^2-2.1000.1+(1)^2$
$=1000000-2000+1=998001$.

উদা. 6. প্রমাণ কর যে $(b-a)^2=(a-b)^2$

$$(b-a)^2=(b)^2-2.b.a+(a)^2=b^2-2ab+a^2$$
$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$
$$\therefore\quad (b-a)^2=(a-b)^2.$$

উদা. 7. $(a-b-c)^2 \quad =\{(a-b)-c\}^2$
$$=(a-b)^2-2(a-b)c+(c)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2.$$

উদা. 8 $(2a+3b-5c)^2=\{(2a+3b)-5c\}^2$
$$=(2a+3b)^2-2(2a+3b)5c+(5c)^2$$
$$=4a^2+12ab+9b^2-20ac-30bc+25c^2.$$

উদা. 9. $9x^2-42xy^2+49y^4$ কে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর।
প্রদত্তরাশি $=(3x)^2-2.3x.7y^2+(7y^2)^2=(3x-7y^2)^2$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab$
$$=(a-b)^2+2ab.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
$$=a^2+b^2+2ab-4ab$$
$$=(a+b)^2-4ab$$

অনুসিদ্ধান্ত 3. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
$$=a^2+b^2-2ab+4ab=(a-b)^2+4ab.$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. $(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$
$$=2(a^2+b^2).$$

অনুসিদ্ধান্ত 5. $(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+b^2+2ab)-(a^2+b^2-2ab)$
$$=a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab$$
$$=4ab.$$

উদা. 10. $a+\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$ এর মান কত ?

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2.a.\frac{1}{a}=(3)^2-2=9-2=7.$$

উদা. 11. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$ এর মান কত ?

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2.a.\frac{1}{a}=(3)^2+2=9+2=11.$$

উদা. 12. $x+y=8$ এবং $xy=15$ হইলে, $x-y$ এর মান কত ?

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(8)^2-4.15=64-60=4$

$\therefore\ x-y=2.$ (অথবা $-2$)

উদা. 13. $x-y=4$ এবং $xy=21$ হইলে, $x+y$ এর মান কত ?

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(4)^2+4\times 21=16+84=100$

$\therefore\ x+y=10.$ ( অথবা $-10$).

উদা. 14. মান নির্ণয় কর : $169x^2-390xy+225y^2$. $x=7, y=6]$

$$\begin{aligned}169x^2-390xy+225y^2&=(13x)^2-2.13x.15y+(15y)^2\\&=(13x-15y)^2=(13.7-15.6)^2\\&=(91-90)^2=1^2=1.\end{aligned}$$

উদা. 15. সরল কর : $(6x-5y)^2-2(6x-5y)(5x-4y)+(5x-4y)^2$

মনে কর $6x-5y=a$ এবং $5x-4y=b.$

প্রদত্ত রাশি $=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$=(6x-5y-5x+4y)^2$ [$a$ ও $b$ এর মান বসাইয়া ]

$=(x-y)^2.$

## প্রশ্নমালা 27

সূত্রসাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

1. $a-x$
2. $2a-b$
3. $2b-a$
4. $3x-y$
5. $3a-2b$
6. $ab-cd$
7. $xy-bc$
8. $4x-5y$
9. $2a^2-3b^2$
10. $a-\frac{1}{a}$
11. $3x-\frac{1}{3x}$
12. $p^4-2q^2$
13. $x-y-z$
14. $2x+3y-4z$

পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর :

15. $4a^2-4a+1$
16. $4x^2-8x+4$
17. $9a^2-6ab+b^2$
18. $x^4-2x^2y^2+y^4$

19. $25x^2 - 30xy + 9y^2$

20. $16a^4 - 8a^2 + 1$

21. $36a^2b^2 - 12abx + x^2$

22. $9p^2 - 2 + \frac{1}{9p^2}$

23. $4a^2 - 2a + \frac{1}{4}$

24. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{9}{4}y^2$

সূত্রসাহায্যে মান নির্ণয় কর :

25. $64x^2 - 80xy + 25y^2$ $[x = 7, \ y = 11]$

26. $49a^2 - 56ab + 16b^2$ $[a = 15, \ b = 25]$

27. $4a^2 - 12ab + 9b^2$ $[a = 78, \ b = 52]$

28. $(30-5)^2$, $(80-2)^2$, $798^2$, $1197^2$.

সরল কর :

29. $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b) + (a-b)^2$

30. $(2a+3b)^2 - 2(2a+3b)(2a-3b) + (2a-3b)^2$

31. $(a+b+c)^2 - 2(a+b+c)(a+b-c) + (a+b-c)^2$

32. $(x-2y)^2 + (3x-5y)^2 - 2(x-2y)(3x-5y)$

33. $x + y = 13$, $xy = 42$ হইলে, $x - y$ এর মান কত ?

34. $x - y = 2$, $xy = 35$ হইলে, $x + y$ এর মান কত ?

35. $a + \frac{1}{a} = 2$ হইলে, $a^2 + \frac{1}{a^2} =$ কত ?

*36. $a + \frac{1}{a} = \sqrt{2}$ হইলে, প্রমাণ কর $a^2 + \frac{1}{a^2} = 0$.

37. $x + \frac{1}{x} = 3$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

38. $x - \frac{1}{x} = 3$ হইলে, $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ কত ?

39. $x + \frac{1}{x} = a$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

*40. $a + b = 8$ এবং $ab = 15$ হইলে, $(a-b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

*41. $a - b = 2$, $ab = 15$ হইলে, $a^2 + b^2$ এবং $a^4 + b^4$ এর মান নির্ণয় কর।

*42. $x + \frac{1}{x} = 5$ হইলে, প্রমাণ কর :

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$, (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4} = 527$, (iii) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 21$.

*43 $a + b = 3$, $a - b = 1$ হইলে, $8ab(a^2 + b^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$
$$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$
তদ্রূপ, $(a^2+2bc)(a^2-2bc)=a^2(a^2-2bc)+2bc(a^2-2bc)$
$$=a^4-2a^2bc+2a^2bc-4b^2c^2=(a^2)^2-(2bc)^2.$$

**সুতরাং, দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল উহাদের বর্গের অন্তরের সমান।** উক্ত নিয়মটির বৈজিক প্রতিসূত্র :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

8. **সূত্রটির প্রয়োগ।**

উদা. 1. $2x+3y$ এবং $2x-3y$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(2x+3y)(2x-3y)$
$$=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2.$$

উদা. 2. $(a+b+c)$ এবং $(a+b-c)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a+b+c)(a+b-c)$
$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$$
$$=(a+b)^2-c^2=a^2+b^2+2ab-c^2.$$

উদা. 3. $a^2+ab+b^2$ কে $a^2-ab+b^2$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$$=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=a^4+b^4+2a^2b^2-a^2b^2$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

উদা. 4. গুণফল নির্ণয় কর : $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$
$$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=\{(a)^2-(2b)^2\}(a^2+4b^2)$$
$$=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)=(a^2)^2-(4b^2)^2=a^4-16b^4.$$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : $937^2-927^2$
$$937^2-927^2=(937+927)(937-927)$$
$$=1864\times10=18640.$$

উদা. 6. $915\times885$ এর গুণফল নির্ণয় কর :
$$915\times885=(900+15)(900-15)$$
$$=900^2-15^2=810000-225=809775$$

উদা. 7. উৎপাদক নির্ণয় কর : (i) $9x^2-25$, (ii) $4a^2-(b+c)^2$

(i) $9x^2-25=(3x)^2-(5)^2=(3x+5)(3x-5)$.

(ii) $4a^2-(b+c)^2=(2a)^2-(b+c)^2=\{2a+(b+c)\}\{2a-(b+c)\}$
$=(2a+b+c)(2a-b-c)$.

## প্রশ্নমালা 28

সূত্রসাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(a+1)(a-1)$ 2. $(x-a)(x+a)$
3. $(5a+6b)(5a-6b)$ 4. $(5a+y)(5a-y)$
5. $(a^2-2x)(a^2+2x)$ 6. $(ab-ac)(ab+ac)$
7. $(a^3+bc)(a^3-bc)$ 8. $(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
9. $(x+\frac{1}{2}y)(x-\frac{1}{2}y)$ 10. $(2m^2+3n^2)(2m^2-3n^2)$
11. $(2ac+bd)(2ac-bd)$ 12. $(a+b+c)(a-b-c)$
13. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ 14. $(x^2+y^2)(x-y)(x+y)$
15. $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$ 16. $(1+x)(1+x^2)(1-x)$

সূত্রসাহায্যে মান নির্ণয় কর :

17. $729^2-719^2$ 18. $8748^2-8648^2$ 19. $57285^2-57185^2$
20. $424\times376$ 21. $1216\times1184$ 22. $2525\times2475$

সূত্রসাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

23. $(x+y-z)(x+y+z)$ 24. $(x+y-z)(x-y+z)$
25. $(2x-3y-3z)(2x+3y-3z)$ 26. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
27. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$
28. $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$
29. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$ 30. $(a+b-c-d)(a+b-c+d)$

উৎপাদক নির্ণয় কর :

31. $4a^2-9b^2$ 32. $a^2b^2-c^2d^2$ 33. $9a^2-(2b-c)^2$

# সপ্তম অধ্যায়

## সরল সমীকরণ ( সহজ )

**1. সমীকরণ (Equation)।** সমিত চিহ্ন ( = ) দ্বারা সংযুক্ত বীজগণিতীয় দুইটি রাশির পরস্পর সম্পর্কের সাধারণ নাম সমীকরণ। সমিত চিহ্নের বামদিকের রাশিটিকে **বাম পক্ষ** এবং ডানদিকের রাশিটিকে **দক্ষিণ পক্ষ** বলে।

রাশিদ্বয়ের সমতা ব্যবহৃত অক্ষরের মান নিরপেক্ষ হইলে অর্থাৎ অক্ষরের যে কোন মানে উভয় রাশির সমতা অব্যাহত থাকিলে সমীকরণটিকে **অভিন্ন সমীকরণ** ( Identical Equation ) বা সংক্ষেপে **অভেদ** ( Identity ) বলা হয়। অভেদ প্রকৃতপক্ষে একই রাশির রূপান্তর মাত্র।

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ইহাদের প্রত্যেকটি অভেদ, কারণ $a$ ও $b$-র যে কোন মানেই প্রত্যেক স্থলে উভয় পক্ষের সমতা অব্যাহত থাকে।

ব্যবহৃত অক্ষরের বিশেষ বিশেষ মানে উভয় পক্ষের সমতা বজায় থাকিলে, সমীকরণটিকে **সাপেক্ষ সমীকরণ** ( Conditional Equation ) বা সংক্ষেপে **সমীকরণ** ( Equation ) বলা হয়।

"$5x=20$" একটি সাপেক্ষ সমীকরণ, কারণ $x$-এর 4 ভিন্ন অন্য কোন মানেই $5x=20$ হয় না।

'$3x+2=11$' ইহাও একটি সাপেক্ষ সমীকরণ, কারণ $x$-এর 3 ভিন্ন অন্য কোন মানে $3x+2=11$ হয় না।

উক্ত প্রকারের সাপেক্ষ সমীকরণই সাধারণতঃ সমীকরণ নামে পরিচিত।

2. সমীকরণে ব্যবহৃত যে অক্ষরটির মান অনির্দিষ্ট বা অজ্ঞাত তাহাকে **অজ্ঞাত রাশি** ( Unknown Quantity ) বলে, এবং অবশিষ্টগুলিকে **জ্ঞাত বা ধ্রুবক** ( Known or Constant ) রাশি বলিয়া মনে করা হয়।

সাধারণতঃ $x$, $y$, $z$ দ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং $a$, $b$, $c$ ও পাটীগণিতের সংখ্যা দ্বারা জ্ঞাত রাশি প্রকাশ করা হয়।

3. অজ্ঞাত রাশির যে মান দ্বারা উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয় তাহাকে ঐ সমীকরণের বীজ ( Root or Solution ) বলে। বীজদ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ ( Satisfied ) হয়—এইরূপ বলা যাইতে পারে। বীজ-নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকেই সমীকরণের সমাধান বলা হয়। সুতরাং কোন সমীকরণের সমাধান করিতে বলিলে উহার বীজ নির্ণয় করিতে হয়।

4. **সরল সমীকরণ।** অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা ও শক্তি-ভেদে সমীকরণ অনেক প্রকারের হয়। যে সমীকরণে একটিমাত্র প্রথম শক্তি বিশিষ্ট অজ্ঞাত-রাশি থাকে তাহাকে **একবর্ণ সরল সমীকরণ** বলে। ইহাকে সংক্ষেপে **সরল সমীকরণ** ( Simple Equation ) বলা হয়। ইহাকে **প্রথম মানের সমীকরণও** ( First Degree Equation ) বলা হয়।

সরল সমীকরণে সাধারণতঃ অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে $x$ অক্ষরটিই ব্যবহৃত হয়।

$7x+2=23$ একটি সরল সমীকরণ, কারণ ঐস্থলে অজ্ঞাত রাশি $x$ প্রথম শক্তিযুক্ত।

5. **সমস্যা সমাধানের জন্য প্রতীক সাহায্যে সাংকেতিক বাক্য গঠন।**

সমস্যা সমাধানের জন্য উপযুক্ত প্রতীক দ্বারা সাঙ্কেতিক বাক্য অর্থাৎ সমীকরণ গঠন করিতে হয়। ঐ সমীকরণের বীজ হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়। সমীকরণ গঠনই সমস্যা সমাধানের মুখ্য অংশ। বিশেষ বিশেষ শর্ত হইতে কিরূপে সমীকরণ গঠন করা যায় তাহার কতিপয় উদাহরণ প্রদত্ত হইল :

**উদাহরণ।** সমীকরণ আকারে সাঙ্কেতিক বাক্য গঠন কর :

(*i*) $x$ সংখ্যাটির 5 গুণ $a$-র সমান।

$$x \times 5 = a \quad \text{অর্থাৎ} \quad 5x = a.$$

(*ii*) $x$-সংখ্যাটির 3 গুণের সহিত 5 যোগ করিলে যোগফল $b$ হয়।

$$x \times 3 + 5 = b \quad \text{অর্থাৎ} \quad 3x + 5 = b.$$

(*iii*) $x$-সংখ্যাটির 5 গুণ হইতে $a$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x$-এর 3 গুণ অপেক্ষা $b$ বেশী হয়।

$$5 \times x - a = 3 \times x + b \quad \text{অর্থাৎ} \quad 5x - a = 3x + b.$$

(*iv*) $x$ সংখ্যাটির অর্ধ হইতে উহার এক তৃতীয়াংশ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল হয় $d$.

$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}x = d.$$

(*v*) তিনটি ক্রমিক সংখ্যার ক্ষুদ্রতমটি $x$ এবং উহাদের সমষ্টি $s$.

$x$ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বলিয়া উহার পরবর্তী ক্রমিক সংখ্যা দুইটি হইবে

$$(x+1) \quad \text{এবং} \quad (x+2).$$

$$\therefore \quad s = x + (x+1) + (x+2).$$

(*vi*) কোন লোকের বর্তমান বয়স $x$ বৎসর; (1) 10 বৎসর পূর্বে তাহার বয়স ছিল $a$ বৎসর; (2) 10 বৎসর পরে তাহার বয়স হইবে $b$ বৎসর।

$$(i) \quad x - 10 = a, \quad (ii) \quad x + 10 = b.$$

(*vii*) এক ব্যক্তির বর্তমান বয়স তাহার পুত্রের বর্তমান বয়সের পাঁচ গুণ। পুত্রের বর্তমান বয়স $x$ বৎসর হইলে, $a$ বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে।

পুত্রের বর্তমান বয়স $x$ বৎসর হইলে পিতার বর্তমান বয়স $5x$ বৎসর। $a$ বৎসর পরে পিতা ও পুত্রের বয়স হইবে যথাক্রমে $(5x+a)$ এবং $(x+a)$ বৎসর; সুতরাং $2(x+a) = (5x+a)$.

(*viii*) $A$ একটি কাজ $a$ দিনে এবং $B$ উহা $b$ দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উহারা উভয়ে $x$ দিনে কাজটি সম্পন্ন করে।

1 দিনে $A$ করে কাজটির $\frac{1}{a}$ অংশ, $\therefore$ $x$-দিনে করে $\frac{x}{a}$ অংশ

তদ্রূপ $B$ $x$-দিনে করে $\frac{x}{b}$ অংশ,

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ (সমগ্র কাজ)।

(*ix*) 150 জন বালকের মধ্যে $x$-সংখ্যক বালক প্রত্যেকে 50 পয়সা এবং অবশিষ্ট বালকের প্রত্যেকে 25 পয়সা করিয়া পাইল। 150 জন বালক মোট $s$ টাকা পাইল।

50 পয়সা $= \frac{1}{2}$ টাকা; 25 পয়সা $= \frac{1}{4}$ টাকা।

$\therefore$ $x$-বালক পাইল $x \times \frac{1}{2}$ টাকা বা $\frac{x}{2}$ টাকা $\quad \cdots(i)$

অবশিষ্ট বালকের সংখ্যা $= (150 - x)$

$\therefore$ $(150 - x)$ বালক পাইল $(150 - x) \times \frac{1}{4}$ টা. $= \frac{150 - x}{4}$ টাকা $\quad \cdots(ii)$

$$\therefore \quad s = \frac{x}{2} + \frac{150 - x}{4}.$$

## মৌখিক আলোচনার জন্য কতিপয় প্রশ্ন

সাঙ্কেতিক বাক্যে প্রকাশ কর :—

(*i*) $x$ অপেক্ষা 5 অধিক সংখ্যাটি $a$-র সমান।

(*ii*) $y$ অপেক্ষা 3 কম সংখ্যাটি $b$-র সমান।

(*iii*) $x$ সংখ্যাটি $y$ এবং $z$ এর সমষ্টির তিন-চতুর্থাংশ।

(*iv*) $x$ সংখ্যাটি $y$ এবং $z$ এর অন্তরের এক-সপ্তমাংশ।

(*v*) $x$ সংখ্যক বালকের প্রত্যেককে 2 টাকা এবং $y$ সংখ্যক বালিকার প্রত্যেককে 3 টাকা করিয়া দেওয়ায় মোট $R$ টাকা খরচ হইল।

(*vi*) একটি চৌবাচ্চায় $x$-লিটার জল আছে। $y$-লিটার জল ধরে এইরূপ $N$-সংখ্যক বালতি জল তুলিয়া দেখা গেল চৌবাচ্চায় আর $P$-লিটার জল আছে।

(*vii*) $x$ বৎসর পরে এক ব্যক্তির বয়স 63 বৎসর হইবে ; ঐ ব্যক্তির বর্তমান বয়স $y$ বৎসর।

(*viii*) $A$ সংখ্যাটিকে $D$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $Q$ এবং ভাগশেষ $R$ হয় ; $A, D, Q, R$ এর সম্বন্ধসূচক একটি সূত্র গঠন কর এবং সূত্রটির অর্থ কথায় প্রকাশ কর।

**6. সরল সমীকরণের বিভিন্ন আকার।** সরল সমীকরণগুলির মোটামুটি তিনটি আকার।

**প্রথম আকার।** যে কোন সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশিটি কোন জ্ঞাত রাশির সমান, ইহাই এই শ্রেণীর বিশিষ্ট রূপ ; যেমন, $5x=15$, ইহার সাধারণ রূপ হইল $ax=b$. এস্থলে $a$ অজ্ঞাত রাশি $x$-এর যে কোন সহগ এবং $b$ একটি $x$-বর্জিত জ্ঞাত রাশি। $a$ ও $b$ উভয়ই জ্ঞাত বা ধ্রুবক রাশি।

**দ্বিতীয় আকার।** এই শ্রেণীর সমীকরণে সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশি ও কোন জ্ঞাত রাশির সমষ্টি অপর একটি জ্ঞাত রাশির সমান, যেমন $3x+5=20$. ইহার সাধারণ রূপ হইল $ax+b=c$. এস্থলে $a, b, c$ এর প্রত্যেকটিই জ্ঞাত রাশি এবং $a$, $x$-এর সহগ।

**তৃতীয় আকার।** এই শ্রেণীর সমীকরণে উভয় পক্ষেই জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশি বর্তমান থাকে ; যেমন, $4x+3=3x+6$. ইহার সাধারণ রূপ হইল

$ax+b=cx+d$. এস্থলে $a, b, c, d$ প্রত্যেকেই জ্ঞাত রাশি।

**7. সরল সমীকরণের সমাধান।** যে কোন প্রকারের সরল সমীকরণের সমাধানের মৌলিক প্রক্রিয়া হইল জ্ঞাত বা অজ্ঞাত রাশির পৃথকীকরণ। অর্থাৎ বিশেষ বিশেষ স্থলে বিভিন্ন প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমিত চিহ্নের এক দিকে অজ্ঞাত রাশি এবং অপর দিকে জ্ঞাত রাশি স্থানান্তরিত করিতে হয়। এই প্রক্রিয়ার জন্য নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ কয়টির প্রয়োগ করিতে হয়। যথা—

(*i*) সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান অথবা একই রাশি যুক্ত বা বিযুক্ত হইলে, যথাক্রমে যোগফল ও বিয়োগফল পরস্পর সমান হয়। সমীকরণ সমাধানের **পক্ষান্তর-প্রক্রিয়া** (Principle of Transposition) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

(*ii*) সমান সমান রাশিকে সমান সমান অথবা একই রাশিদ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে যথাক্রমে গুণফল বা ভাগফল পরস্পর সমান হয়। সমীকরণ সমাধানের **সরলীকরণ প্রক্রিয়া** (Principle of Simplification) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা বিভিন্ন প্রকারের সমীকরণের সমাধান প্রক্রিয়া প্রদর্শিত হইতেছে।

8. $ax=b$ আকারের সমীকরণের সমাধান প্রণালী।

উদা. 1. সমাধান কর : $8x=64$.

$8x=64 \quad \therefore \quad x=\frac{64}{8}$ ( উভয় পক্ষকে 8 দ্বারা ভাগ করিয়া )
$=8.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{3}{4}x=9$.

$\frac{3}{4}x=9$ অথবা $3x=36$ ( উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করিয়া )
$\therefore \quad x=\frac{36}{3}$ ( উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া )
$=12.$

$\frac{3}{4}$-এর অন্যোন্যক বা বিপরীত ( reciprocal ) $\frac{4}{3}$ দ্বারা গুণ করিয়া আরও সংক্ষেপে সমাধান করা যায়— $\frac{3}{4}x=9$
$\therefore \quad x=9\times\frac{4}{3}=12.$

**9. সমীকরণের প্রয়োগ।** সমাধানযোগ্য যে কোন প্রশ্নকেই সমস্যা ( Problem ) বলা যায়। সমস্যা নানাবিধ, সরল ও জটিল। কোন সমস্যার সমস্ত রাশিই জ্ঞাত যেমন একটি সাধারণ যোগ অঙ্ক; আবার কোন কোন সমস্যার কতকগুলি রাশি জ্ঞাত এবং কতকগুলি অজ্ঞাত। এইরূপ জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশিসম্বলিত সমস্যা বা প্রশ্নের সমাধান ( solution of a problem ) বীজগণিতের সমীকরণের প্রয়োগে অতি সহজেই করা যাইতে পারে। সমীকরণের জ্ঞাত রাশির সাহায্যেই অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা হয়। এই সমস্ত সমস্যায় সাধারণতঃ নির্ণেয় রাশিটিকে অজ্ঞাত রাশি ধরিয়া জ্ঞাত রাশি এবং প্রদত্ত শর্তের সাহায্যে সমস্যাটিকে একটি বীজগণিতের সমীকরণের আকারে পরিণত করিয়া উহার বীজ নির্ণয় করিতে হয়। নির্ণীত বীজ হইতেই প্রদত্ত সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।

অজ্ঞাত রাশিগুলির প্রতীক হিসাবে সাধারণতঃ $x$, $y$, $z$ প্রভৃতি অক্ষরগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। যে সমস্যায় একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, সেইরূপ স্থলে অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে $x$ অক্ষরটি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট অতি সহজ সমস্যার সমাধানের জন্য সমীকরণ গঠন ও উহার সমাধান-প্রণালী কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা দেখান হইতেছে।

উদা. 3. কোন্ রাশির আটগুণ 72 ?

প্রথমতঃ, মনে কর নির্ণেয় রাশিটি $x$ ; সুতরাং উহার 8 গুণ $=8x$

$\therefore$ সমস্যার শর্ত অনুসারে, $8x=72$ ( একটি সমীকরণ গঠিত হইল )।

উক্ত সমীকরণের সমাধান করিয়া $x$-এর মান নির্ণয় করিলেই প্রদত্ত সমস্যার উত্তর পাওয়া যাইবে।

এখন, $8x = 72$

$\therefore$ $x = \frac{72}{8} = 9$. ইহাই নির্ণেয় রাশি।

উদা. 4. 800 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় কোন ব্যবসায়ীর ক্রয়-মূল্যের $\frac{1}{5}$ অংশ ক্ষতি হইল। ঘোড়াটির ক্রয় মূল্য কত ছিল?

মনে কর ঘোড়াটির ক্রয়-মূল্য $x$ টাকা ছিল। তাহা হইলে ব্যবসায়ীর ক্ষতি হইল $\frac{1}{5}x$ টাকা। সুতরাং বিক্রয়-মূল্য হইল $(x - \frac{1}{5}x)$ টাকা $= \frac{4}{5}x$ টাকা।

সুতরাং সমস্যার শর্ত অনুসারে, $\frac{4}{5}x = 800$

$\therefore$ $x = 800 \times \frac{5}{4} = 1000$, $\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়-মূল্য $= 1000$ টাকা।

উদা. 5. কোন ব্যবসায়ী প্রথম বৎসর মূলধনের এক তৃতীয়াংশ লাভ করিল এবং দ্বিতীয় বৎসর আদি মূলধনের অর্ধাংশ লাভ করিয়া দুই বৎসরে মোট 1000 টাকা লাভ করিল; তাহার মূলধন কত?

মনে কর নির্ণেয় মূলধন $= x$ টাকা।

$\therefore$ প্রথম বৎসরের লাভ $= \frac{1}{3}x$ টাকা এবং দ্বিতীয় বৎসরের লাভ $= \frac{1}{2}x$ টাকা।

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 1000$

অথবা $\frac{5}{6}x = 1000$ $\therefore$ $x = 1000 \times \frac{6}{5} = 1200$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 1200$ টাকা।

## প্রশ্নমালা 29

সমাধান কর :—

1. $2x = 10$ 2. $3x = 12$ 3. $5x = 30$
4. $7x = 42$ 5. $6x = 13$ 6. $9x = 30$
7. $\frac{1}{2}x = 15$ 8. $\frac{1}{5}x = 3$ 9. $\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{3}$
10. $x + \frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2}$ 11. $7x + 3x = 35$ 12. $3{\cdot}5x = 7$

সমীকরণ গঠন করিয়া সমাধান কর :

13. কোন্ সংখ্যার 7 গুণ, 98-এর সমান?
14. কোন্ সংখ্যার 9 গুণ, 15 এবং 18-এর গুণফলের সমান?
15. কোন্ সংখ্যার $2\frac{1}{2}$ গুণ, 100-এর সমান?

16. কোন সম্পত্তির $\frac{2}{7}$ অংশের মূল্য 1200 টাকা ; ঐ সম্পত্তির মোট মূল্য কত ?

17. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$-এর অন্তর 10 ?

18. $A$ কোন ব্যবসায়ের ·25 অংশের মালিক এবং $B$ ·35 অংশের মালিক ; উহাদের উভয়ের নিয়োজিত মূলধনের পরিমাণ মোট 6000 টাকা ; সমগ্র ব্যবসায়ে কত টাকা খাটিতেছে ?

---

### 10. $ax+b=c$ আকারের সমীকরণের সমাধান প্রণালী।

**উদা. 1.** সমাধান কর : $5x+2=32$

$5x+2=32$

অথবা, $5x+2-2=32-2$ ( উভয় পক্ষ হইতে 2 বাদ দিয়া )

অথবা, $5x=30$

$\therefore x=\frac{30}{5}$ ( উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া )

$=6.$

**উদা. 2.** সমাধান কর : $7x-2=33$

$7x-2=33$

অথবা, $7x-2+2=33+2$ ( উভয় পক্ষে 2 যোগ করিয়া )

অথবা, $7x=35$

$\therefore x=\frac{35}{7}=5.$

**উদা. 3.** সমাধান কর : $3(2x+1)=27$

$3(2x+1)=27$

অথবা, $6x+3=27$

অথবা, $6x+3-3=27-3$

অথবা, $6x=24$

$\therefore x=\frac{24}{6}=4.$

**উদা. 4.** সমাধান কর : $7-4x=3$

$7-4x=3$

অথবা, $7-4x-7=3-7$

অথবা, $-4x=-4$

অথবা, $4x=4$ ( উভয় পক্ষকে $-1$ দ্বারা গুণ করিয়া )

$x=\frac{4}{4}=1.$

**11. সমস্যার সমাধানে $ax+b=c$ আকারের সমীকরণের প্রয়োগ।**

**উদা. 5.** কোন্ সংখ্যার তিনগুণের সহিত 10 যোগ করিলে যোগফল 70 হয়?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি $x$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $3x+10=70$

এখন, $3x+10 = 70$

অথবা, $3x+10-10=70-10$

অথবা, $3x = 60$

$\therefore\ x = \frac{60}{3} = 20 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

**উদা. 6.** 25 হইতে কোন্ সংখ্যার তিন গুণ বাদ দিলে 10 থাকে?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি $x$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে

$25-3x=10$

অথবা, $25-3x-25=10-25$

অথবা, $-3x = -15$

অথবা, $3x = 15$

$\therefore\ x=\frac{15}{3}=5=$ নির্ণেয় সংখ্যা।

**12. সমীকরণের সমাধানের সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া।**

প্রদর্শিত উদাহরণসমূহের যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারা জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশি পৃথক্ করা হইয়াছে। ঐরূপ উভয় পক্ষে যোগ ও বিয়োগ না করিয়া সমীকরণস্থিত বামপক্ষের কোন পদকে দক্ষিণপক্ষে এবং দক্ষিণপক্ষের কোন পদকে বামপক্ষে চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া ( + চিহ্নকে − চিহ্নে এবং − চিহ্নকে + চিহ্নে) আরও সহজে সমাধান করা যায়, যেমন,

$2x+5=15$

$\therefore\ 2x=15-5=10$

$\therefore\ x=\frac{10}{2}=5.$

$3x-2=10$

$3x=10+2=12$

$\therefore\ x=\frac{12}{3}=4.$

প্রথম উদাহরণের উভয় পক্ষ হইতে 5 বিয়োগ না করিয়া, বামপক্ষের $+5$-কে $-5$ করিয়া দক্ষিণ পক্ষের সহিত যুক্ত করা হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উদাহরণের উভয় পক্ষে 2 যোগ না করিয়া $-2$ কে $+2$ করিয়া দক্ষিণ পক্ষের সহিত যুক্ত করা হইয়াছে। দক্ষিণ পক্ষের কোন পদকে বামপক্ষে স্থানান্তরিত করিতে হইলেও উক্ত নিয়ম খাটিবে। সমীকরণের পক্ষস্থিত যে কোন পদ সম্বন্ধেই উক্ত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে।

সমীকরণের এক পক্ষস্থিত পদকে অপরপক্ষে চিহ্ন পরিবর্তন পূর্বক স্থানান্তরিত করার নাম **পক্ষান্তরকরণ** ( Transposition )। উহা যোগ বিয়োগেরই সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া।

**দ্রষ্টব্য।** সমীকরণের উভয় পক্ষের রাশি দুইটিকে সমগ্রভাবে পক্ষান্তরিত করিলে চিহ্ন পরিবর্তনের প্রয়োগ হয় না, যেমন, $3x+2=2x+3$ এই সমীকরণটিকে প্রয়োজনবোধে $2x+3=3x+2$ এইভাবে পক্ষান্তরিত করিয়া লিখিতে পারা যায়, কারণ $a=b$ এবং $b=a$ অভিন্ন সম্বন্ধই প্রকাশ করে।

পক্ষান্তরকরণ যে যোগবিয়োগেরই সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া ইহা সম্যক উপলব্ধি করাইবার জন্য পূর্বোক্ত উদাহরণগুলিতে প্রকৃত যোগ বিয়োগ করিয়াই সমাধান প্রক্রিয়া দেখান হইয়াছে। পরবর্তী উদাহরণসমূহে পক্ষান্তরকরন প্রক্রিয়াই অবলম্বিত হইবে।

## প্রশ্নমালা 30

সমাধান কর :—

**1.** $x+3=5$ **2.** $3x+7=16$ **3.** $5x-8=22$

**4.** $9x+6=33$ **5.** $15x-1=59$ **6.** $17x+5=124$

**7.** $5(x+2)=30$ **8.** $7x+\frac{1}{2}=21\frac{1}{2}$ **9.** $11x-\frac{1}{3}=32\frac{2}{3}$

**10.** $6(2x+\frac{1}{2})=39$ **11.** $8(\frac{1}{2}x-3)=16$ **12.** $69=3(5x-2)$

**13.** $4x+7=8$ **14.** $5x-8=15$ **15.** $\frac{3}{4}x-6=2$

**16.** কোন্ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 8 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 72 হয়?

**17.** কোন্ সংখ্যার দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিয়া যোগফলকে 5 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 35 হয়?

**18.** কোন ফেরিওয়ালার নিকট যতগুলি আম ছিল সে উহার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা পাঁচটি আম বেশী বিক্রয় করিয়া দেখিল তাহার নিকট আরও 15-টি আম আছে; তাহার নিকট কয়টি আম ছিল?

19. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ এর অন্তরের সহিত 10 যোগ করিলে যোগফল 100 হয় ?

20. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ অপেক্ষা 5 বৎসর বেশী। যদি পিতার বয়স 50 বৎসর হয়, তাহা হইলে পুত্রের বয়স কত ?

---

**13. $ax+b=cx+d$ আকারের সরল সমীকরণের সমাধান।**

এইরূপ সমীকরণের সমাধানে পক্ষান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ দ্বারা অজ্ঞাত এবং জ্ঞাত রাশিগুলিকে বিপরীত পক্ষভুক্ত করিয়া লইতে হয়। উদাহরণ দ্বারা সমাধান প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $5x+3=3x+7.$

$5x+3=3x+7.$

অথবা, $5x-3x=7-3$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

অথবা, $2x=4$

$\therefore\ x=\frac{4}{2}=2.$

উদা. 2. সমাধান কর : $3x+4=7x-8$

$3x+4=7x-8$

অথবা, $3x-7x=-8-4$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

অথবা, $-4x=-12$

অথবা, $4x=12$ ( উভয় পক্ষকে $-1$ দ্বারা গুণ করিয়া )

$\therefore\ x=\frac{12}{4}=3.$

উদা. 3. সমাধান কর : $8x+5=6x+1$

$8x+5=6x+1$

অথবা, $8x-6x=1-5$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

অথবা, $2x=-4$

$\therefore\ x=\frac{-4}{2}=-2.$

উদা. 4. সমাধান কর : $3(2x-1)=4(3x-5)$

$3(2x-1)=4(3x-5)$

অথবা, $6x-3=12x-20.$

অথবা, $6x-12x=-20+3$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

অথবা, $-6x=-17$

অথবা, $6x=17$ ( উভয় পক্ষকে $-1$ দ্বারা গুণ করিয়া )

$\therefore\ x=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}.$

**14. সমীকরণের সমাধানের শুদ্ধি-পরীক্ষা।**

সমীকরণের সমাধান বা উত্তর নির্ণয় করিয়া প্রদত্ত সমীকরণে $x$-এর পরিবর্তে উক্ত উত্তর বসাও। যদি উভয় পক্ষ সমান হয়, উত্তর শুদ্ধ হইয়াছে জানিবে।

উদা. 3-এ উত্তর হইয়াছে $x = -2$. প্রদত্ত সমীকরণে $x = -2$ বসাও।

বাম পক্ষ $= 8x + 5 = 8 \times (-2) + 5 = -16 + 5 = -11$

দক্ষিণ পক্ষ $= 6x + 1 = 6 \times (-2) + 1 = -12 + 1 = -11$.

উভয় পক্ষই $-11$ এর সমান হইয়াছে ; সুতরাং সমীকরণটি সিদ্ধ হইয়াছে।

**15. সমস্যা সমাধানে $ax + b = cx + d$ আকারের সমীকরণের প্রয়োগ।**

উদা 5. কোন্ সংখ্যার তিন গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলে এবং দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিলে একই সংখ্যা হয় ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি $x$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $3x - 3 = 2x + 3$

অথবা, $3x - 2x = 3 + 3$

$\therefore \; x = 6 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

উদা. 6. কোন্ সংখ্যার তিনগুণের সহিত 1 যোগ করিয়া যোগফলকে পাঁচ গুণ করিলে গুণফল উহার সতর গুণ অপেক্ষা 1 কম হয় ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি $x$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $5(3x + 1) = 17x - 1$

অথবা, $15x + 5 = 17x - 1$

অথবা, $15x - 17x = -1 - 5$

অথবা, $-2x = -6$

$x = \dfrac{-6}{-2} = 3 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

## প্রশ্নমালা 31

সমাধান কর :

1. $2x + 3 = x + 5$
2. $3x - 7 = 2x + 1$
3. $5x + 2 = 3x + 8$
4. $9x - 5 = 5x + 15$
5. $11x + 2 = 8x + 20$
6. $15x - 10 = 12x + 2$

7. $3(x+2)=2(x+3)$ 8. $2(x-6)=x-3$

9. $16-3x=5x-16$ 10. $8x+2(x-5)=5x+10$

11. $3(2x+5)-2x=3(x+6)$ 12. $10x+2(x-7)+2x=0$

13. 20 হইতে কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল ঐ সংখ্যাটির তিনগুণ হইবে?

14. কোন্ সংখ্যা হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 3 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ঐ সংখ্যাটি অপেক্ষা 4 বেশী হয়?

15. কোন্ সংখ্যার 15 গুণের সহিত 28 যোগ করিলে যত যোগফল হয়, 48-এর সহিত ঐ সংখ্যার 5 গুণ যোগ করিলেও যোগফল তত হয়?

16. 56 হইতে কোন সংখ্যার 21 গুণ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল উক্ত সংখ্যার 36 গুণ অপেক্ষা 1 কম হয়; সংখ্যাটি কত?

17. 100কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের চার গুণ ক্ষুদ্রতর অংশের ছয় গুণের সমান হয়।

18. 19কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের 4 গুণ হইতে ক্ষুদ্রতর অংশের 7 গুণ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল 10 হয়।

---

### 16. বিবিধ সহজ সরল সমীকরণ।

উদা. 1. সমাধান কর: $(x+1)(x+5)=(x+2)(x+3)$

$$(x+1)(x+5)=(x+2)(x+3)$$

অথবা, $x^2+6x+5=x^2+5x+6$

অথবা, $x^2+6x-x^2-5x=6-5$

অথবা, $x=1$

উক্ত উদাহরণটিতে $x$-এর দ্বিঘাত বিদ্যমান থাকাতে উহাকে আপাততঃ দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া মনে হয়, কিন্তু লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে $x^2$ বা $x^2$-যুক্ত পদটি শেষ পর্যন্ত অপসারিত হয় এবং সমীকরণটি সরল সমীকরণে পরিণত হয়।

উদা. 2. সমাধান কর: $2x(3x+1)=6(x^2+2)$

$$2x(3x+1)=6(x^2+2)$$

অথবা, $6x^2+2x=6x^2+12$

অথবা, $6x^2+2x-6x^2=12$

অথবা, $2x=12$

$\therefore \quad x=\frac{12}{2}=6.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{x+7}{4}=\frac{2x-1}{3}$.

$$\frac{x+7}{4}=\frac{2x-1}{3},$$

4 এবং 3 এর ল. সা. গু. 12 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$\frac{x+7}{4}\times 12=\frac{2x-1}{3}\times 12$$

অথবা, $(x+7)\times 3=(2x-1)\times 4$

অথবা, $3x+21=8x-4$

অথবা, $3x-8x=-4-21$

অথবা, $-5x=-25$

$\therefore \quad x=\frac{-25}{-5}=5.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$,

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

অথবা, $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{3x-2x}{6}=\frac{3-2}{6}$

অথবা, $\frac{x}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore \quad x=\frac{1}{6}\times 6=1$

(অথবা), 2 এবং 3 এর ল. সা. গু. 6 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 6=\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)\times 6$$

অথবা, $6.\frac{x}{2}+6.\frac{1}{3}=6.\frac{x}{3}+6.\frac{1}{2}$

অথবা, $3x+2=2x+3$

অথবা, $3x-2x=3-2$

$\therefore \quad x=1.$

উদা. 5. $x$-এর মান কত হইলে, $(x+3)(x-5)=(x+1)^2$ হইবে ?

$$(x+3)(x-5)=(x+1)^2$$

অথবা, $x^2-2x-15=x^2+2x+1$

অথবা, $x^2-2x-x^2-2x=1+15$

অথবা, $-4x=16$, $\therefore \quad x=\frac{16}{-4}=-4$.

## প্রশ্নমালা 32

সমাধান কর :

1. $4x - 3 = 4(2x - 1) + 13$
2. $3x - 10(2x - 3) + 21 = 0$
3. $x(x + 3) = x^2 + 12$
4. $x(5 - x) = 15 - x^2$
5. $(3x + 2)(x + 2) = x(3x + 10)$
6. $x^2 + 3(5x - 18) + 3x^2 = 4x^2 - 3x$
7. $(x - 3)(x - 2) = (x - 4)(x + 5)$
8. $(x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 5$
9. $15(x^2 - 3) + 20x = x(15x + 17)$
10. $(2x + 1)(3x + 1) = 6x(x + 1)$
11. $(x - 2)^2 + 5 - x = (x + 1)(x - 1)$
12. $4(x + 1) + (x + 4)(x - 5) - (x + 1)(x - 1) = 3$
13. $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{3} + 4$
14. $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1$
15. $\frac{x}{12} - 2 = \frac{x}{6} - \frac{x}{4}$
16. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{12} = 12$
17. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 7$
18. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 13 - \frac{x}{4}$
19. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{4}$
20. $\frac{8x}{5} = \frac{4x + 3}{3}$
21. $\frac{5x + 7}{2} = 3x$
22. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 26$
23. $x$-এর মান কত হইলে, $x(x - 9) = x^2 - 36$ হইবে ?
24. $x$-এর মান কত হইলে, $(x - 5)^2 + (2x - 3)^2$ এবং $5(x - 2)^2$ এর মান সমান হইবে ?
25. $x$-এর মান কত হইলে, $(x + 1)^2 - x^2 = 3$ হইবে ?

---

### 17. সমস্যা সমাধানে সমীকরণের প্রয়োগ (বিবিধ)।

*উদা. 1. $A$-র বর্তমান বয়স $B$ ও $C$-এর বর্তমান বয়সের সমষ্টির সমান। 4 বৎসর পরে $A$-র বয়সের 6 গুণ, $B$ ও $C$-র বয়সের সমষ্টির 5 গুণের সমান হইবে। $A$-র বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, $A$-র বর্তমান বয়স $x$ বৎসর।

তাহা হইলে $B$ ও $C$-এর বর্তমান বয়সের সমষ্টিও হইবে $x$ বৎসর।

4 বৎসর পরে $A$-র বয়স হইবে $(x+4)$ বৎসর এবং $B$ ও $C$-এর বয়সের সমষ্টি হইবে $(x+4+4)$ বা $(x+8)$ বৎসর।

$\therefore$ শর্ত অনুসারে, $6(x+4)=5(x+8)$

বা, $6x+24=5x+40$

বা, $6x-5x=40-24$

বা, $x=16=A$-র বর্তমান বয়স।

*উদা. 2. 192 কিলোমিটার দূরবর্তী দুইটি স্টেশন হইতে একই সময় দুইখানি ট্রেন পরস্পরের দিকে রওনা হইল এবং $2\frac{2}{3}$ ঘণ্টা পরে পরস্পরের সম্মুখীন হইল। যদি একটি ট্রেনের বেগ অপরটির বেগের $\frac{5}{4}$ গুণ হয়, তাহা হইলে প্রত্যেক ট্রেনের বেগ নির্ণয় কর।

ধর, একখানি ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় $x$ কিলোমিটার;

তাহা হইলে অপর ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় $\frac{5}{4}x$ কিলোমিটার।

$2\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় প্রথম ট্রেন যায় $\frac{8}{3}x$ কিলোমিটার

এবং দ্বিতীয় ট্রেন যায় $\frac{5}{4}x\times\frac{8}{3}$ বা $\frac{10x}{3}$ কিলোমিটার।

$\therefore$ শর্ত অনুসারে, $\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}x=192$

বা, $6x=192$

$\therefore\ x=32$

$\therefore$ প্রথম ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় 32 কি. মি.

এবং অপর ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় $32\times\frac{5}{4}$ কি. মি. বা 40 কি. মি.।

## প্রশ্নমালা 33

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 30 এবং বিয়োগফল 4. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 100 এবং বিয়োগফল 10. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. 130-টি বালক-বালিকার মধ্যে 40 টাকা এমন ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে প্রত্যেক বালক 25 পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকা 50 পয়সা করিয়া পাইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

4. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের তিনগুণ। কিন্তু 16 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

*5. একখানি ট্রেন কোন স্টেশন হইতে ঘণ্টায় 32 কিলোমিটার বেগে রওনা হইল। ঠিক সেই সময় 32 কিলোমিটার অগ্রবর্তী আর এক স্টেশন হইতে আর একখানি ট্রেন একই দিকে ঘণ্টায় 24 কিলোমিটার বেগে রওনা হইল। উভয় ট্রেন একই সময়ে একই জংসনে পৌছিল। প্রথম স্টেশন হইতে জংসনের দূরত্ব কত?

6. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা এক-চতুর্থাংশ 3 বেশী।

7. একটি সংখ্যা 100 অপেক্ষা যত কম, চতুর্গুণ করিলে উহা 100 অপেক্ষা তত বেশী হইবে; সংখ্যাটি কত?

8. 210 টাকা 30 জন পুরুষ এবং 20 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন প্রত্যেক পুরুষ প্রত্যেক স্ত্রীলোক অপেক্ষা দুই টাকা বেশী পায়।

9. $A$ একটি কাজ 10 দিনে এবং $B$ উহা 15 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একত্র কাজ করিলে উহা কতদিনে সম্পন্ন হইবে?

10. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 63; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

11. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার তিনগুণ 120 হইতে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল সংখ্যাটি অপেক্ষা 8 অধিক হয়।

12. কোন্ সংখ্যার দ্বিগুণ এবং তিনগুণের সমষ্টি 75 হইতে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 30 হইবে?

13. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 25; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

14. দুইটি সংখ্যার অন্তর 4 এবং উহাদের বর্গের অন্তর 80; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

15. $A$, $B$, $C$-এর মধ্যে 100 টাকা এমনভাবে ভাগ কর যেন $A$, $B$ অপেক্ষা 10 টাকা বেশী এবং $C$ অপেক্ষা 20 টাকা কম পায়।

16. একটি থলিয়াতে 50টি মুদ্রা আছে, তন্মধ্যে কতকগুলি টাকা এবং অবশিষ্টগুলি আধুলি। যদি মুদ্রাগুলির মোট মূল্য 40 টাকা হয়, তাহা হইলে কোন্ প্রকারের কয়টি মুদ্রা আছে?

17. একটি বাঁশের এক-পঞ্চমাংশ কাদার মধ্যে, এক-তৃতীয়াংশ জলের মধ্যে এবং জলের উপর 7 মিটার আছে ; বাঁশটির দৈর্ঘ্য কত ?

18. একটি বাঁশের অর্ধেক এবং এক-তৃতীয়াংশ কাটার পর দেখা গেল আর মাত্র 2 মিটার দীর্ঘ একটি খণ্ড আছে ; বাঁশটির দৈর্ঘ্য কত ?

*19. 400 কিলোমিটার দূরবর্তী দুইটি স্টেশন হইতে $A$ ও $B$ দুইখানি ট্রেন একই সময় পরস্পরের অভিমুখে রওনা হইয়া 5 ঘণ্টা পরে পরস্পরের সম্মুখীন হইল। যদি দ্বিতীয় ট্রেনের বেগ প্রথম ট্রেনের বেগের দেড়গুণ হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকের বেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার ?

*20. $A$-র বর্তমান বয়স $B$ ও $C$-এর বর্তমান বয়সের সমষ্টির সমান। পাঁচ বৎসর পরে $A$-র বয়সের 8 গুণ $B$ ও $C$-এর বয়সের সমষ্টির 7 গুণ হইবে ; $A$-র বর্তমান বয়স কত ?

*21. $A$-র নিকট 72 টাকা এবং $B$-র নিকট 12 টাকা আছে ; $A$, $B$-কে কত টাকা দিলে $B$-এর নিকট $A$-র তিনগুণ টাকা হইবে ?

---

# অষ্টম অধ্যায়

## লেখ-চিত্র

### ( অনুভূমিক লেখ )

1. **লেখ (Graph)।** যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ও অন্যান্য নানাবিধ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাটীগণিত ও বীজগণিতের প্রশ্নাদির সমাধান করা হইয়া থাকে। $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ প্রভৃতি বীজগণিতের সূত্রগুলি জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে স্পষ্টতরভাবে প্রমাণিত হইয়া থাকে। একটির সঙ্গে আর একটির বিশিষ্ট সম্বন্ধযুক্ত কতকগুলি বিষয় আছে বিন্দু, রেখা প্রভৃতি জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে যাহাদের সম্বন্ধে সুস্পষ্ট চাক্ষুষ ধারণা জন্মিতে পারে। এইরূপ চিত্রকে লেখ-চিত্র বলা হয়। লোক-গণনা, সংখ্যা-তালিকা সমন্বিত বহু তথ্য,

বৃষ্টিপাত, তাপমাত্রা বিভিন্ন স্থানের উৎপন্ন দ্রব্যের তুলনামূলক সংখ্যা-তালিকা, এইরূপ বহু বিষয় লেখ-চিত্রের সাহায্যে অতি স্পষ্ট ও সহজভাবে চক্ষুর সম্মুখে প্রকাশ করা যায়। লেখ-চিত্রের সাহায্যে প্রশ্ন সমাধানের এইরূপ প্রণালীকে **লৈখিক প্রণালী** ( Graphical method ) বলে। লেখ-চিত্র অনেক রকমের হয়। এস্থলে অতি সহজ এক প্রকার লেখ-চিত্রের আলোচনা করা হইবে।

2. **ছক-কাগজ ( Squared paper )।** লেখ-চিত্র অঙ্কন করিবার জন্য এক প্রকার কাগজ ব্যবহার করা হয়। এই কাগজের উপর সমদূরবর্তী কতকগুলি অনুভূমিক ( horizontal ) এবং কতকগুলি উল্লম্ব ( vertical ) সরলরেখা অঙ্কিত থাকে, যাহাতে সমস্ত কাগজখানি কতিপয় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। এইরূপ বর্গাঙ্কিত কাগজকে ছক-কাগজ বলা হয়।

3. **ছক-কাগজের ব্যবহার।**

(*i*) ছক-কাগজে প্রথমতঃ পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ দুইটি সরলরেখা বিশেষভাবে চিহ্নিত করিয়া লইতে হয়। এই দুইটি বিশেষ সরলরেখাকে **অক্ষ** ( Axes ) বলে। এই সরলরেখা দুইটির বরাবর গণনা করা হইয়া থাকে। উক্ত দুইটি সরলরেখার ছেদ-বিন্দুকে **মূলবিন্দু** ( Origin ) বলে। মূলবিন্দুটি সাধারণতঃ $O$ অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

(*ii*) যখন পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত দুইটি বিষয়ের তুলনা-মূলক গণনা করা হয়, তখন কোন্ বিষয়টি কোন্ অক্ষের বরাবর গণনা করা হয় তাহা লিখিতভাবে উল্লেখ করিতে হয়।

(*iii*) সঠিক গণনার জন্য উভয়পক্ষে সুবিধামত সুনির্দিষ্ট একক ব্যবহার করিতে হয়।

এস্থলে যে প্রকার লেখ সম্বন্ধে আলোচনা করা ও উদাহরণ দেওয়া হইবে তৎসমুদয় ছক কাগজ ছাড়া সাধারণ কাগজেও আঁকা যাইতে পারে। কিন্তু প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে ছক ব্যবহার করা বিধেয়; কারণ উহাতে অঙ্কনকার্য সহজ হইবে এবং ভুলের মাত্রা কম হইবে।

পূর্বোক্ত সংখ্যা-তালিকামূলক লেখগুলি ( Statistical Graphs ) সাধারণতঃ মোটা সরলরেখা ( আয়তাকার ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অবশ্য নানারূপ জ্যামিতিক ক্ষেত্রের সাহায্যেও উক্তরূপ লেখ অঙ্কনের প্রণালী প্রচলিত আছে।

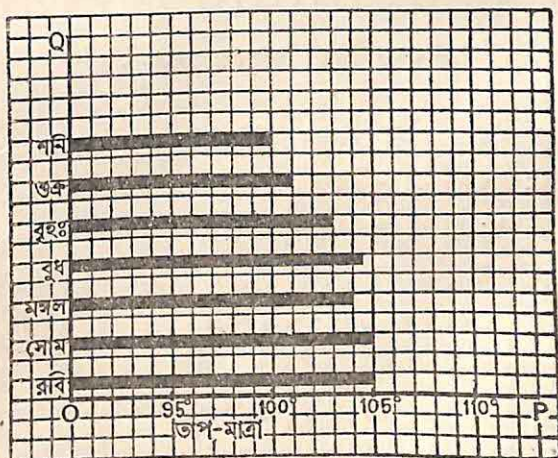
লেখ সূচক সরলরেখাগুলি দ্বিবিধ প্রণালীতে ছক কাগজের বাম হইতে দক্ষিণে প্রসারিত অর্থাৎ অনুভূমিক সরলরেখা দ্বারা অথবা নীচ হইতে উপরে লম্বভাবে অঙ্কিত অর্থাৎ উল্লম্ব সরলরেখা দ্বারা প্রদর্শিত করা হয়।

4. অনুভূমিক সরলরেখা দ্বারা প্রদর্শিত লেখকে **অনুভূমিক-লেখ** ( Bar Graph ) এবং উল্লম্ব সরলরেখা দ্বারা প্রদর্শিত লেখকে **স্তম্ভ-লেখ** ( Column Graph ) বলা যাইতে পারে। উক্ত উভয় প্রকার লেখতে মূলতঃ কোন প্রভেদ নাই। প্রভেদ মাত্র অঙ্কন প্রণালীতে। নিম্ন প্রদর্শিত উদাহরণগুলির সাহায্যে লেখ-চিত্র অঙ্কনের প্রণালী সহজভাবে বুঝা যাইবে।

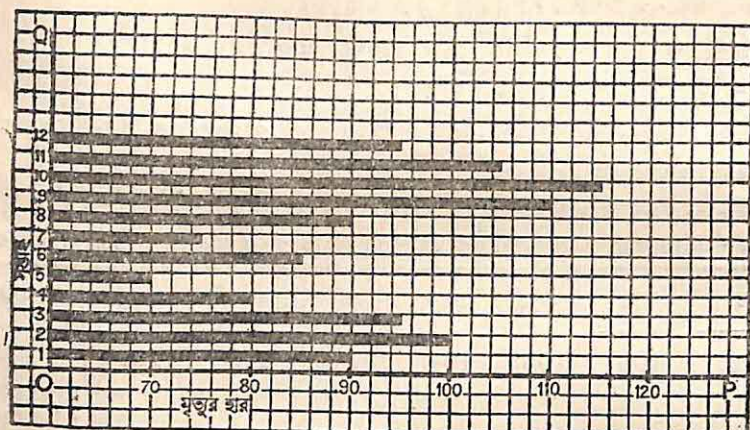
বর্তমান অধ্যায়ে অনুভূমিক লেখ সম্বন্ধেই অলোচনা করা হইবে। স্তম্ভ-লেখ অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইবে।

**দ্রষ্টব্য।** তুলনার সুবিধা এবং স্পষ্টতার জন্য লেখগুলিকে অপেক্ষাকৃত মোটা রেখা ব্যবহার করা হয়।

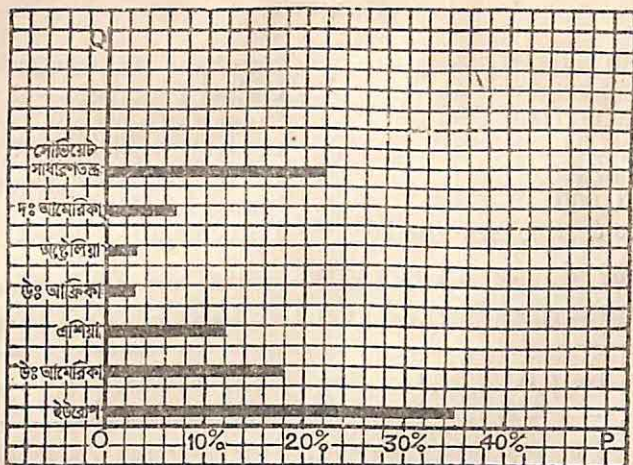
**উদা. 1.** কোন জ্বররোগাক্রান্ত রোগীর রবিবার হইতে শনিবার পর্যন্ত 7 দিনের শরীরের সর্বোচ্চ তাপ-মাত্রার তালিকা দেওয়া আছে; একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

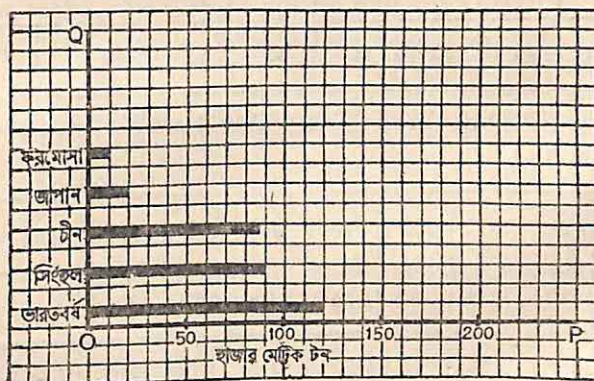
| বার | রবি | সোম | মঙ্গল | বুধ | বৃহস্পতি | শুক্র | শনি |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ডিগ্রী | 105° | 105° | 104° | 104·5° | 103° | 101° | 100° |

সাপ্তাহিক তাপমাত্রার লেখ-চিত্র

উদা. 2. কোন শহরের 1953 খ্রীষ্টাব্দের 12 সপ্তাহের মৃত্যুর হারের একটি তালিকা দেওয়া আছে ; একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| সপ্তাহ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| মৃত্যুহার | 90 | 100 | 95 | 80 | 70 | 85 | 75 | 90 | 110 | 115 | 105 | 95 |

**সপ্তাহের মৃত্যুর হারের লেখ-চিত্র**

উদা. 3. পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানের 1934 খ্রীষ্টাব্দের গম উৎপাদনের শতকরা হার দেওয়া হইল ; একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| | |
|---|---|
| ইউরোপ ( U. S. S. R. ব্যতীত ) | 35% |
| উত্তর আমেরিকা— | 18% |
| এশিয়া ( U. S. S. R. এবং চীন ব্যতীত ) | 12% |
| উত্তর আফ্রিকা— | 3% |
| অষ্ট্রেলিয়া— | 3% |
| দক্ষিণ আমেরিকা— | 7% |
| U. S. S. R.— | 22% |

কয়েকটি দেশের গম উৎপাদনের শতকরা হারের লেখ-চিত্র

উদা. 4. পাঁচটি দেশের পাঁচ বৎসরের চা রপ্তানীর ( মেট্রিক টনে ) গড় হিসাবের একটি লেখ-চিত্র দেওয়া হইল। লেখ-চিত্র হইতে মোটামুটি রপ্তানীর পরিমাণ নির্ণয় কর।

কয়েকটি দেশের চা রপ্তানির লেখ-চিত্র

## প্রশ্নমালা 34

1. ভারতবর্ষের কয়েকটি স্থানের 1941 খ্রীষ্টাব্দের লোকসংখ্যা দেওয়া হইল। প্রতি 10 লক্ষকে একক ধরিয়া জনসংখ্যার একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

Bengal—60,000,000
Bihar—36,000,000
Assam—10,000,000
Orissa—9,000,000
Madras—49,000,000
Delhi—920,000
Andamans & Nicobars—34,000
Bombay—21,000,000
United Provinces—55,000,000
Punjab—28,000,000
Central Province—17,000,000
N. W. F. Province—3,000,000
Sind—4,500,000
Beluchistan—500,000

2. 1952 খ্রীষ্টাব্দের জানুয়ারী হইতে ডিসেম্বর পর্যন্ত কোন স্থানের মাসিক উত্তাপের গড়ের একটি তালিকা দেওয়া হইল। একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| মাস | জা. | ফে. | মা. | এ. | মে. | জু. | জু. | আ. | সে. | অ. | ন. | ডি. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| গড় উত্তাপ | 64·7° | 66·3° | 73·1° | 86·9° | 92·1° | 95·1° | 88·9° | 84·7° | 85·7° | 80·4° | 69·9° | 62·3° |

3. কোন ফেরিওয়ালার আট সপ্তাহের লাভের তালিকা দেওয়া হইল। একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে কোন্ সপ্তাহে সর্বাধিক লাভ এবং কোন্ সপ্তাহে সর্বনিম্ন লাভ হইয়াছে নির্ণয় কর।

| সপ্তাহ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লাভ ( টাকা ) | 45 | 50 | 60 | 55 | 65 | 50 | 48 | 50 |

4. বিভিন্ন অক্ষরেখায় দীর্ঘতম দিনের পরিমাণের একটি তালিকা দেওয়া হইল। লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| অক্ষাংশ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| দিনের পরিমাণ ( ঘণ্টায় ) | 12 | 12·58 | 13·3 | 14 | 14·8 | 16·1 | 18·5 | 24 | 24 | 24 |

5. ইংলণ্ড এবং ওয়েল্সের লোকসংখ্যার একটি তালিকা দেওয়া হইল; লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| আদম সুমারীর বৎসর | 1841 | 1851 | 1861 | 1871 | 1881 | 1891 | 1901 | 1911 | 1921 | 1931 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা ( 10 লক্ষে ) | 15·9 | 17·9 | 20·1 | 22·7 | 26 | 29 | 32·5 | 36·1 | 37·9 | 40 |

( অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ )

# নবম অধ্যায়

## পুনরালোচনা

1. অষ্টম অধ্যায় পর্যন্ত যে বিষয় সমূহের আলোচনা করা হইয়াছে, তাহার পুনরালোচনার জন্য একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

### বিবিধ প্রশ্ন (1)

1. $a$ ও $b$-র যোগফল এবং বিয়োগফল নির্ণয় কর। $a$ কে $b$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল কত হয়? $a$কে $b$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল কত হয়?

2. একটি বালকের 12-টি পয়সা আছে, অপর একটি বালকের $-12$-টি পয়সা আছে বলিলে কি বুঝিবে?

3. $2x+3y-4z$, $3y+2z-x$, $-4y+z-x$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

4. 0 হইতে $2x-3y-z$ বিয়োগ কর।

5. সরল কর : $2x(x-2)+4(x-1)-(2x^2-5)$

6. $x$ ঘণ্টা $y$ মিনিট $z$ সেকেণ্ডকে, সেকেণ্ডে পরিণত কর।

7. $-2a^3b^2c$-কে কোন্ রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $10a^5b^4c^3$ হয়?

8. প্রমাণ কর যে $6x^3-17x^2+5x=0$, যখন $x=\frac{1}{3}$ অথবা যখন $x=2\frac{1}{2}$

9. $a+b=3$ এবং $ab=2$ হইলে, $a^2+b^2$-এর মান নির্ণয় কর।

10. সরল কর : $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+2(a+b-c)(a-b+c)$

---

11. $2x^3$ এবং $(2x)^3$ এর প্রভেদ কি বুঝাইয়া দাও। $x=10$ হইলে, $(2x)^3-2x^3$-এর মান নির্ণয় কর।

12. মনে কর $x$-সংখ্যক বালকের প্রত্যেককে $x$ পয়সা করিয়া দেওয়া হইল। সকলে মোট কত টাকা পাইল?

13. $3a^3-1$-এর সহিত $-2a^2+5a$ যোগ কর, এবং যোগফল হইতে $2a^3-2a^2-3a-1$ বিয়োগ কর।

14. সরল কর : $3\{b^2 - b(1 - \overline{a - b})\}$

15. $9x^2 - 3x + 1$-কে $3x + 1$ দ্বারা গুণ কর।

16. $x^2 - 2x - 3$-কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ কর।

17. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(i) $(a+1)(a+1)$ (ii) $(5x+6)(5x-6)$

18. $x$-এর মান কত হইলে, $5x - 1 = 3x + 7$ হয় ?

19. যদি $x - \frac{1}{x} = 1$ হয়, দেখাও যে $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 3.$

20. সরল কর : $(a+b)(a-b) + (b+c)(b-c) + (c+a)(c-a).$

---

21. $3a^2x$-এর $x$-এর সহগ কত ? $5ab^2c$-এর $b^2$-এর সহগ কত ?

22. যদি $x=6, y=4, z=9$ হয়, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $x^2 \div yz$, (ii) $x^2 \div y \times z$, (iii) $\sqrt{yz} \div x$, (iv) $y\sqrt{z} \div x$

23. সরল কর : (i) $a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)$

(ii) $a - [a - \{a - (a - \overline{a - 1})\}]$

24. (i) 0 হইতে $-x + 3y - 2z$ বিয়োগ কর।

(ii) $3x - 2y - 5z$ এর সহিত কত যোগ করিলে $x + y + z$ হইবে ?

25. যদি $x = c(a-b), y = a(b-c), z = b(c-a)$ হয়,

$x + y + z$-এর মান নির্ণয় কর।

26. $x^4 + 4y^4$-কে $x^2 + 2xy + 2y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

27. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(i) $(2x+1)(2x+1)$ (ii) $(2x-1)(2x-1)$

(iii) $(2x+1)(2x-1)$ (iv) $(1+3a)(1-3a)$

28. $3ab^2 - 2a^2b - b^3 + a^3$-কে $a$-র ঘাতের নিম্নগ ও উর্ধ্বগক্রমে লিখ।

29. যদি $a - b = 2$ এবং $ab = 15$ হয়, তবে $a^2 + b^2$-এর মান নির্ণয় কর।

30. মান নির্ণয় কর : $(2{\cdot}751)^2 + (1{\cdot}249)^2 + 2 \times 2{\cdot}751 \times 1{\cdot}249.$

---

31. যদি $a=3$, $b=2$ এবং $c=5$ হয়,
$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ এর মান কত ?

32. $2a+3b-4c$, $3a-2b+4c$, $-4a+2b+3c$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

33. $a^2-3ab+5b^2$ হইতে $3b^2-3ab-a^2$ বিয়োগ কর।

34. $a^2+ab+b^2$ কে $2a-2b$ দ্বারা গুণ কর।

35. সরল কর :

$(2x+3y)(2x-3y)+(3y+4z)(3y-4z)+(4z+2x)(4z-2x)$

36. যদি $13x-1=6x+13$ হয়, $x$-এর মান কত ?

37. $x$ মিটার $y$ ডেসিমিটার $z$ সেন্টিমিটারকে সেন্টিমিটারে পরিবর্তিত কর।

38. যদি একখানা ট্রেন $x$ ঘণ্টায় $y$ কিলোমিটার চলে, তবে উহা $z$ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার যাইবে ?

39. $8{\cdot}968\times 8{\cdot}968+1{\cdot}032\times 1{\cdot}032+2\times 8{\cdot}968\times 1{\cdot}032$ এর মান নির্ণয় কর।

40. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

---

41. যদি $a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{4}$ হয়, প্রমাণ কর $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$

42. যোগ কর, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c$, $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}b-\frac{1}{4}c$

43. $3a^2+2b^2-3c^2$-এর সহিত কত যোগ করিলে $a^2+b^2+c^2$ হয় ?

44. $4x^2-2x+1$ কে $2x+1$ দ্বারা গুণ কর।

45. $2x^2-3x-5$-কে $x+1$ দ্বারা ভাগ কর।

46. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(i) $(2a+3b)(2a+3b)$ (ii) $(2a-3b)(2a-3b)$

(iii) $(2a-3b)(2a+3b)$ (iv) $(3x+5y)(3x-5y)$

47. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার ক্ষুদ্রতমটি $x$ হইলে, অপর দুইটি কত ?

48. $x$-এর মান কত হইলে, $15x-7=3x+77$ হয় ?

49. $4x^2-9y^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

50. $a^2+b^2=34$ এবং $ab=15$ হইলে, $(a+b)^2$-এর এবং $a+b$ এর মান নির্ণয় কর।

51. $(3x)^3$ ও $3x^3$-র সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর, যখন $x=2$.

52. যদি $a=1$, $b=2$, $c=3$ হয়, $\sqrt{a^2+3b+6c}(c^3-12ab)^2$-এর মান নির্ণয় কর।

53. $4a^2-5ab-3b^2$, $2b^2-3ab-7a^2$, $-a^2+10ab+b^2$ এবং $5a^2+b^2-2ab$-এর যোগফল নির্ণয় কর।

54. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{4}c^2$-এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $a^2+b^2+c^2$ হয় ?

55. সরল কর : $a-[b-c-\{a-(b-\overline{c-a})\}]$

56. $a+2b$, $a-2b$, $a^2+4b^2$-এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

57. $27x^6-1$-কে $3x^2-1$ দ্বারা ভাগ কর।

58. সরল কর : $(3x+2y)(3x-2y)-(5z-2y)(5z+2y)$
$$-(3x+5z)(3x-5z)$$

59. সরল কর : $(2x+3y)^2+(2x-y)^2-2(2x+3y)(2x-y)$

60. $a^2+\dfrac{1}{a^2}=3$ হইলে, $a^4+\dfrac{1}{a^4}$-এর মান নির্ণয় কর।

---

61. যদি $a=2$, $b=4$ এবং $c=5$ হয়,
$\sqrt[3]{ab}+\sqrt{2ab}(\sqrt[3]{2c^2+3b+a}$-এর মান নির্ণয় কর।

62. যদি $A=2x-3y+4z$, $B=-3x+2y+4z$, $C=4x+2y-3z$ হয়
$A-B+C$-এর মান কত ?

63. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z$ হইতে $\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}y-\frac{1}{2}z$ বিয়োগ কর।

64. $2x^2+3x-1$-কে $3x-5$ দ্বারা গুণ কর।

65. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$-কে $2x-3y$ দ্বারা ভাগ কর।

66. $x$ কিলোগ্রাম $y$ হেক্টোগ্রাম $z$ ডেকাগ্রামকে গ্রামে পরিবর্তিত কর।

67. প্রতি কিলোগ্রাম $a$ টাকা দরে $b$ কিলোগ্রাম দ্রব্য কিনিয়া প্রতি কিলোগ্রাম $(a+2)$ টাকা দরে সমস্ত দ্রব্য বিক্রয় করিলে কত লাভ হয় ?

68. সমাধান কর : $16(2x-7)-18(3x-14)=30$.

69. 41-কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের $\frac{1}{4}$ এবং দ্বিতীয় অংশের $\frac{1}{5}$-এর সমষ্টি 9 হয়।

70 সমাধান কর : $1-[2x-\{3x-(4x-5)\}]+12=0$

71. $(a+b)^2+(a+b-2c)^2-2(a+b)(a+b-2c)$ কে সরল কর।

72. যদি $x-\frac{1}{x}=m$ হয়, $x^2+\frac{1}{x^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

---

73. যদি $a=11$ হয়, $\sqrt[3]{[(a+2)\sqrt{a-2}-2\{\sqrt[3]{11a^2}-a+2\sqrt{a-2}\}]}$-এর মান নির্ণয় কর।

74. সরল কর : $3a-[a+b-2\{a+b+c-(a-b+c-d)\}+a]$

75. $a\{a-(c-b)\}$ এবং $c\{a-(b-c)\}$-এর সমষ্টি হইতে $b\{a-(b+c)\}$ বিয়োগ কর।

76. $2x-3y$ কে $3x-2y$ দ্বারা গুণ কর।

77. $x^4-y^4$ কে $x+y$ দ্বারা ভাগ কর।

78 সূত্রের সাহায্যে সম্প্রসারণ কর :
(i) $(2x+3)^2$ (ii) $(3a^2-5b^2)^2$

79. যদি $2x+5=7x-40$ হয়, $x$-এর মান কত?

80. সমাধান কর : $x-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x)=1$

81. যদি $a$-কে তিনটি অংশে ভাগ করা যায় এবং প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ যথাক্রমে $x$ ও $y$ হয়, তৃতীয় অংশ কত হইবে?

*82. এক ব্যক্তির বর্তমান বয়স তাহার পুত্রের বর্তমান বয়সের তিন গুণ। 12 বৎসর পরে তাহার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। প্রত্যেকের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

83. সরল কর :
$$(x^2-y^2)(x^2+y^2)-(z^2-y^2)(z^2+y^2)-(x^2-z^2)(x^2+z^2)$$

84. যদি $x+\frac{1}{x}=3$ হয়, $x^4+\frac{1}{x^4}$-এর মান নির্ণয় কর।

85. কোন শীতপ্রধান দেশের জানুয়ারী হইতে জুন পর্যন্ত ছয় মাসের সর্বোচ্চ তাপের গড় সেন্টিগ্রেড ডিগ্রীতে দেওয়া হইল; একটি অনুভূমিক লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| মাস | জা. | ফে. | মা. | এ. | মে. | জু. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| সর্বোচ্চ তাপের মাসিক গড় | 4·4° | 7° | 10° | 14° | 18° | 21° |

---

# দশম অধ্যায়

## দুরূহ গুণন ও ভাগ

### দুরূহ গুণন

**1.** গুণনের নিয়ম পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে কয়েকটি দুরূহ গুণনের প্রক্রিয়া উদাহরণ সাহায্যে পুনরায় আলোচিত হইল। বৃহৎ আকারের গুণ করিবার সময় প্রথমে গুণ্য ও গুণক উভয় রাশিমালাকেই সাধারণ অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বগ বা নিম্নগ ক্রমে সাজাইয়া লইলে বিশেষ সুবিধা হয়।

উদা. 1 $2x^2+y^2+2xy$কে $2x^2+y^2-2xy$ দ্বারা গুণ কর।

রাশিমালা দুইটিকে $x$-এর ঘাতের নিম্নগ ক্রমে সাজাইলে হইবে,

$2x^2+2xy+y^2$ এবং $2x^2-2xy+y^2$.

$$\begin{array}{l}
2x^2+2xy+y^2 \\
\underline{2x^2-2xy+y^2} \\
4x^4+4x^3y+2x^2y^2 \\
\qquad -4x^3y-4x^2y^2-2xy^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2y^2+2xy^3+y^4} \\
4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +y^4
\end{array}$$

নির্ণেয় গুণফল $=4x^4+y^4$.

উদা. 2. $a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca$কে $a-b+c$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l}
a^2+ab-ca+b^2+bc+c^2 \\
\underline{a\ \ -b+c} \\
a^3+a^2b-ca^2+ab^2+abc+ac^2 \\
\quad -a^2b \qquad\quad -ab^2+abc \qquad -b^3-b^2c-bc^2 \\
\qquad\qquad ca^2 \qquad\quad \underline{+abc-ac^2 \qquad +b^2c+bc^2+c^3} \\
a^3 \qquad\qquad\qquad\qquad +3abc \qquad -b^3 \qquad\qquad\quad +c^3
\end{array}$$

নির্ণেয় গুণফল $=a^3-b^3+c^3+3abc$.

*উদা. 3. $a+b+c, b+c-a, c+a-b, a+b-c$-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
-a+b+c \\
\hline
-a^2-ab-ac \\
\quad +ab \quad +b^2+bc \\
\qquad +ac \quad +bc+c^2 \\
\hline
-a^2 \quad +b^2+2bc+c^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a-b+c \\
a+b-c \\
\hline
a^2-ab+ac \\
\quad +ab \quad -b^2+bc \\
\qquad -ac \quad +bc-c^2 \\
\hline
a^2 \quad -b^2+2bc-c^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-a^2+b^2+2bc+c^2 \\
a^2-b^2+2bc-c^2 \\
\hline
-a^4+a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2 \\
\quad +a^2b^2 \qquad -b^4-2b^3c-b^2c^2 \\
\qquad -2a^2bc \qquad +2b^3c+4b^2c^2+2bc^3 \\
\qquad\quad +a^2c^2 \qquad -b^2c^2-2bc^3-c^4 \\
\hline
-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$.

উদা. 4. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{8}z$ কে $\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}z$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{8}z \\
\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}z \\
\hline
\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}xy-\frac{9}{32}xz \\
\quad -\frac{5}{8}xy \qquad -\frac{15}{8}y^2+\frac{15}{32}yz \\
\qquad +\frac{1}{8}xz \qquad +\frac{3}{8}yz-\frac{3}{32}z^2 \\
\hline
\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{5}{32}xz-\frac{15}{8}y^2+\frac{27}{32}yz-\frac{3}{32}z^2
\end{array}$$

= নির্ণেয় গুণফল।

2. আক্ষরিক সহগ সম্বলিত দুইটি রাশিমালার গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে সহগগুলি বন্ধনীযুক্ত করিয়া রাখা যায়।

উদা. 5. $(a+b)x+(a-b)y$ কে $(a-b)x-(a+b)y$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l}
(a+b)x+(a-b)y \\
(a-b)x-(a+b)y \\
\hline
(a+b)(a-b)x^2+(a-b)^2xy \\
\qquad -(a+b)^2xy-(a-b)(a+b)y^2 \\
\hline
(a^2-b^2)x^2+\{(a-b)^2-(a+b)^2\}xy-(a^2-b^2)y^2
\end{array}$$

$=(a^2-b^2)x^2-4abxy-(a^2-b^2)y^2$, = নির্ণেয় গুণফল।

উদা. 6. $ax^2+bx+c$ কে $px^2+qx+r$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} ax^2+bx+c \\ px^2+qx+r \\ \hline apx^4+bpx^3+cpx^2 \\ \qquad aqx^3+bqx^2+cqx \\ \qquad\qquad arx^2+brx+cr \\ \hline \end{array}$$

গুণফল $= apx^4+(bp+aq)x^3+(cp+bq+ar)x^2+(cq+br)x+cr.$

উদা. 7. $1-2x+4x^2-8x^3+16x^4$ এবং $1+2x+4x^2+8x^3+16x^4$ এর গুণফলে $x^4$-এর সহগ নির্ণয় কর। (C. U. 1912)

এস্থলে দুইটি রাশিমালার সম্পূর্ণ গুণফল নির্ণয় করার প্রয়োজন নাই। গুণ্যের যে যে পদকে গুণকের যে যে পদ দ্বারা গুণ করিলে $x^4$ পাওয়া যায়, মাত্র সেই সেই পদের গুণফল নির্ণয় করিয়া $x^4$-এর সহগ সমূহের বৈজিক সমষ্টি নির্ণয় করিলেই নির্ণেয় সহগ পাওয়া যাইবে।

রাশি দুইটির প্রথমটিকে গুণ্য ও দ্বিতীয়টিকে গুণক ধর। গুণকের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দ্বারা যথাক্রমে গুণ্যের পঞ্চম, চতুর্থ, তৃতীয়, দ্বিতীয় ও প্রথম পদকে গুণ করিয়া গুণফলগুলি হইবে,

$16x^4\times1=16x^4$; $\quad -8x^3\times2x=-16x^4$; $\quad 4x^2\times4x^2=16x^4$;
$-2x\times8x^3=-16x^4$; $\quad 1\times16x^4=16x^4$.

$\therefore$ $x^4$ এর সহগ $=16-16+16-16+16=16.$

3. গুণনের সময় একই অক্ষরের ঘাতের সূচক যোগ করিতে হয়। সূচক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলেও এই নিয়মটি খাটিবে ; যথা—

$$x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x^1=x\ ;\ x^{\frac{2}{3}}\times x=x^{\frac{2}{3}+1}=x^{\frac{5}{3}}\ ;$$

$x^{-1}\times x^{-1}=x^{(-1)+(-1)}=x^{-2}$ ; $x^{-3}\times x^2=x^{-3+2}=x^{-1}$, ইত্যাদি।

উদা. 8. $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$-কে $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \\ \hline x - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ \quad + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y \\ \hline x \qquad\qquad\qquad + y \end{array}$$

নির্ণেয় গুণফল $= x + y$.

$x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = x^1 = x$;
$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;
$x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$;
$x^{\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;
$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$;
$y^{\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = y^1 = y$.

উদা. 9. $x^{-2} + y^{-2}$-কে $x - y^{-1}$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} x^{-2} + y^{-2} \\ x \quad - y^{-1} \\ \hline x^{-1} + xy^{-2} \\ \qquad\qquad - x^{-2}y^{-1} - y^{-3} \\ \hline x^{-1} + xy^{-2} - x^{-2}y^{-1} - y^{-3} \end{array}$$

$x^{-2} \times x = x^{-2+1} = x^{-1}$
$y^{-2} \times y^{-1} = y^{-2-1} = y^{-3}$

## প্রশ্নমালা 35

গুণ কর :

1. $a^2 - ab + a + 1$ কে $a + b - 1$ দ্বারা
2. $2x^2 + 6x + 9$ কে $2x^2 - 6x + 9$ দ্বারা
3. $1 - a - 2a^2 - 3a^4$ কে $3a - 5 + 2a^2$ দ্বারা
4. $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 3yz - 2zx + 6xy$ কে $2x - 3y + z$ দ্বারা
5. $a^2 + 25b^2 + 4c^2 + 5ab + 2ac - 10bc$ কে $a - 5b - 2c$ দ্বারা
6. $a^8 - a^6 + 2a^4 + a^2 + 1$ কে $a^4 + a^2 - 1$ দ্বারা
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ কে $a + b + c$ দ্বারা
8. $1 + 2a + 3a^2 + 2a^3 + a^4$ কে $a^2 - 2a + 1$ দ্বারা
9. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ কে $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ দ্বারা

10. $ab^2 + a^2b - bc^2 - c^2a$ কে $a^2 + bc - ab - ca$ দ্বারা

11. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}$ কে $2a - \frac{3}{4}$ দ্বারা

12. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$ কে $2x - \frac{2}{3}$ দ্বারা

13. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{12}$ কে $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ দ্বারা

14. $\frac{2}{3}a^2 - \frac{5}{6}ab + b^2$ কে $\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{4}ab + 6b^2$ দ্বারা

15. $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}$ কে $2x^2 - 3x + 5$ দ্বারা

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

16. $1 + x + x^2, 1 - x + x^2, 1 - x^2 + x^4$

17. $x - 1, x + 1, x^2 + 1, x^4 + 1$

18. $x^4 + 16y^4, x^2 + 4y^2, x + 2y, x - 2y$

19. $x - a, x^2 + ax + a^2, x^3 + a^3, x^6 + a^6$

20. $b + c - a, c + a - b, a + b - c$

21. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b, \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2$

22. $\frac{1}{2}a + b, \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + b^2, \frac{1}{8}a^3 - b^3$

$x$-এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করিয়া গুণফল নির্ণয় কর :

23. $ax^2 + bx + c$ কে $px + q$ দ্বারা

24. $x^2 + bx + c$ কে $x^2 - px + q$ দ্বারা

25. $ax^3 - bx + c$ কে $px^3 + qx - r$ দ্বারা

26. $mx^3 + nx^2 + px + q$ কে $ax^2 - bx + c$ দ্বারা

27. $x^2 + (a + b)x + 1$ কে $x^2 - (a + b)x + 1$ দ্বারা

28. $(a + b)^2x^2 + cx + d$ কে $px + 1$ দ্বারা

গুণফল নির্ণয় কর :

29. $x^{\frac{2}{5}} \times x^{\frac{3}{5}}$

30. $x^{\frac{3}{5}} \times x^{\frac{1}{5}}$

31. $x \times x^{\frac{1}{2}}$

32. $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

33. $a^{-3} \times a^2$

34. $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}$

35. $3x^{\frac{1}{2}} \times 2x^{\frac{1}{3}}$

36. $5x^{\frac{3}{4}} \times 2x^{\frac{1}{4}}$

37. $5x^{\frac{3}{5}} \times 2x^{\frac{7}{5}}$

38. $\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} \times \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$

39. $\frac{2}{9}x^{-3} \times \frac{3}{5}x^{\frac{7}{2}}$

40. $\frac{1}{4}x^{-2} \times \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{2}}$

41. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা

42. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1$ কে $a^{\frac{1}{3}}+1$ দ্বারা

43. $x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা

44. $x^2-xy^{-1}+y^{-2}$ কে $x+y^{-1}$ দ্বারা

45. $5x^3+2x^2-7x-8$ এবং $2x^3-3x^2-10x+4$ এর গুণফলে $x^3$-এর সহগ নির্ণয় কর।

46. $2x^3-5x^2+4x-5$ এবং $5x^2-4x+3$ এর গুণফলে $x^3$-এর সহগ নির্ণয় কর।

---

## বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে গুণন (Multiplication by detached co-efficients)

4. গুণ্য ও গুণক উভয় রাশিমালায় একই অক্ষরের ঘাতসমূহ বিদ্যমান থাকিলে অথবা উভয়ই দুইটি অক্ষরযুক্ত সমমাত্র রাশি হইলে, উভয় রাশির ঘাতসমূহ ত্যাগ করিয়া মাত্র সহগগুলিকে বিচ্ছিন্ন করিয়া লিখিয়া গুণনকার্য কিছু সংক্ষেপে করা যায়। গুণনের পূর্বে উভয় রাশিকে কোন একটি সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে সাজাইয়া লইতে হয়।

উদা. 1. $2x^3+3x^2-4x+3$ কে, $3x^2+2x+5$ দ্বারা বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে গুণ কর।

এখানে উভয় রাশিই $x$-এর অধঃক্রম ঘাতে সাজান আছে।

| | |
|---|---|
| $2x^3+3x^2-4x+3$ | $2+3-4+3$ |
| $3x^2+2x+5$ | $3+2+5$ |
| $6x^5+9x^4-12x^3+9x^2$ | $6+9-12+9$ |
| $\quad 4x^4+6x^3-8x^2+6x$ | $\quad 4+6-8+6$ |
| $\quad\quad 10x^3+15x^2-20x+15$ | $\quad\quad 10+15-20+15$ |
| $6x^5+13x^4+4x^3+16x^2-14x+15$ | $6+13+4+16-14+15$ |

এখানে গুণফলে সর্বোচ্চ ঘাত $x^5$,

$\therefore$ পূর্ণ গুণফল $=6x^5+13x^4+4x^3+16x^2-14x+15$

রাশিদ্বয়ে কোন ঘাতের অভাব হইলে তথায় শূন্য বসাইয়া লইতে হয়।

**উদা. 2.** $5x^3+3x-2$ কে $2x^2+3$ দ্বারা বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে গুণ কর

এস্থলে প্রথম রাশিতে $x^2$ এবং দ্বিতীয় রাশিতে $x$ নাই।

$$\begin{array}{l} 5+0+\ 3-2 \\ 2+0+\ 3 \\ \hline 10+0+\ 6-4 \\ \quad\ \ 0+\ 0+0-0 \\ \qquad\quad 15+0+9-6 \\ \hline 10+0+21-4+9-6 \end{array}$$

এখানে গুণফলে $x$-এর সর্বোচ্চ ঘাত হইবে $x^5$,

$\therefore$ পূর্ণ গুণফল $=10x^5+0.x^4+21x^3-4x^2+9x-6$

$=10x^5+21x^3-4x^2+9x-6.$

**উদা. 3.** $x^2+xy+y^2$ কে $x^2-xy+y^2$ দ্বারা বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে গুণ কর।

$$\begin{array}{l} 1+1+1 \\ 1-1+1 \\ \hline 1+1+1 \\ \ \ -1-1-1 \\ \qquad\quad 1+1+1 \\ \hline 1+0+1+0+1 \end{array}$$

এখানে গুণফলে $x$ এবং $y$ এর সর্বোচ্চ ঘাত $x^4$ এবং $y^4$,

$\therefore$ পূর্ণ গুণফল

$=1.x^4+0.x^3y+1.x^2y^2+0.xy^3+1.y^4$

$=x^4+x^2y^2+y^4.$

## প্রশ্নমালা 36

বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $x^3-3x^2+2x+1$ কে $2x+3$ দ্বারা
2. $3x^3-2x^2+5x+4$ কে $x^2-x+2$ দ্বারা
3. $2x^3-3x^2+1$ কে $x^2+2x+4$ দ্বারা

4. $2x^2 + 6x + 9$ কে $2x^2 - 6x + 9$ দ্বারা

5. $3x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ কে $x^2 + 4x + 3$ দ্বারা

6. $2x^3 - 5x^2 - 3x - 5$ কে $3x^2 - 5x - 2$ দ্বারা

7. $x^4 + 2x^2 - 5x + 3$ কে $x^3 + 2x + 1$ দ্বারা

8. $x^5 - 5x^2 + 3x - 1$ কে $x^2 + 2x - 4$ দ্বারা

9. $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$ কে $a^2 + ab + b^2$ দ্বারা

10. $a^2 - 3ab - 4b^2$ কে $5b^2 + 2a^2 - ab$ দ্বারা

---

## দুরূহ ভাগ

5. ভাগের নিয়ম পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে কয়েকটি দুরূহ ভাগের প্রক্রিয়া উদাহরণ সাহায্যে পুনরায় আলোচিত হইল। ভাগ অঙ্ক কষিবার পূর্বে প্রথমে ভাজ্য ও ভাজক উভয় রাশিমালাকেই সাধারণ অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বগ বা নিম্নগ ক্রমে সাজাইতে হয়। ভাগ অঙ্কের প্রতি ধাপ করিবার পরও ভাজ্যের পদগুলিকে উক্ত নিয়মে সাধারণ অক্ষরের ঘাতের একই ক্রমে সাজাইয়া বসাইতে হয়।

উদা. 1. $6x^5 + 42x^3 + 72x - 17x^4 - 66x^2 - 72$ কে $2x^2 + 6 - 3x$ দ্বারা ভাগ কর।

রাশিমালা দুইটিকে $x$-এর ঘাতের নিম্নগ ক্রমে সাজাইলে হয়:

$6x^5 - 17x^4 + 42x^3 - 66x^2 + 72x - 72$ এবং $2x^2 - 3x + 6$

$$2x^2 - 3x + 6)\,6x^5 - 17x^4 + 42x^3 - 66x^2 + 72x - 72\,(3x^3 - 4x^2 + 6x - 12$$

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 9x^4 + 18x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline -8x^4 + 24x^3 - 66x^2 \qquad\qquad \\ -8x^4 + 12x^3 - 24x^2 \qquad\qquad \\ \hline 12x^3 - 42x^2 + 72x \qquad \\ 12x^3 - 18x^2 + 36x \qquad \\ \hline -24x^2 + 36x - 72 \\ -24x^2 + 36x - 72 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 3x^3 - 4x^2 + 6x - 12$.

উদা. 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$ কে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর।

$$a+b+c)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(a^2-ab-ac-bc+b^2+c^2$$

=নির্ণেয় ভাগফল।

$$a^3 \qquad\qquad +a^2b+a^2c$$
$$\overline{-a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3}$$
$$-a^2b \qquad -abc \qquad -ab^2$$
$$\overline{-a^2c-2abc+ab^2+b^3+c^3}$$
$$-a^2c-abc \qquad -ac^2$$
$$\overline{-abc+ab^2+ac^2+b^3+c^3}$$
$$-abc \qquad -b^2c-bc^2$$
$$\overline{ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+b^3+c^3}$$
$$ab^2 \qquad +b^2c \qquad +b^3$$
$$\overline{ac^2 \qquad +bc^2 \qquad +c^3}$$
$$ac^2 \qquad +bc^2 \qquad +c^3$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$

প্রতি ধাপে $a$-র ঘাতের নিম্নগক্রমে সাজান হইয়াছে।

উদা. 3. $\frac{1}{3}a^4-\frac{11}{12}a^3b+\frac{41}{8}a^2b^2-\frac{23}{4}ab^3+6b^4$ কে $\frac{2}{3}a^2-\frac{5}{6}ab+b^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\tfrac{2}{3}a^2-\tfrac{5}{6}ab+b^2)\,\tfrac{1}{3}a^4-\tfrac{11}{12}a^3b+\tfrac{41}{8}a^2b^2-\tfrac{23}{4}ab^3+6b^4\,(\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{3}{4}ab+6b^2$$
$$\tfrac{1}{3}a^4-\tfrac{5}{12}a^3b+\tfrac{1}{2}a^2b^2$$
$$\overline{-\tfrac{1}{2}a^3b+\tfrac{37}{8}a^2b^2-\tfrac{23}{4}ab^3}$$
$$-\tfrac{1}{2}a^3b+\tfrac{5}{8}a^2b^2-\tfrac{3}{4}ab^3$$
$$\overline{4a^2b^2-5ab^3+6b^4}$$
$$4a^2b^2-5ab^3+6b^4$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}ab+6b^2$.

উদা. 4. $(a+b)px^2+\{cp+q(a+b)\}x+cq$ কে $px+q$ দ্বারা ভাগ কর।

$$px+q)\,(a+b)px^2+\{cp+q(a+b)\}x+cq\,(a+b)x+c$$
$$(a+b)px^2+\qquad q(a+b)x$$
$$\overline{cpx+cq}$$
$$cpx+cq$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=(a+b)x+c$.

6. ভাগের সময় একই অক্ষরের ঘাতের সূচক বিয়োগ করিতে হয়। সূচক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলেও একই নিয়ম খাটিবে ; যথা—

$x^{\frac{3}{2}} \div x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = x^1 = x$ ;

$x^2 \div x^{\frac{2}{3}} = x^{2-\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$ ;

$x^{-2} \div x^{-1} = x^{-2-(-1)} = x^{-1}$ ;

$x^3 \div x^{-2} = x^{3-(-2)} = x^{3+2} = x^5$.

উদা. 5. $a - b$ কে $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\ )\ a - b\ (\ a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$$

$$\underline{a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$$

$$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b$$

$$\underline{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$$

$$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b$$

$$\underline{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b}$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $= a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

উদা. 6. $a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + b^{-4}$ কে $a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}\ )\ a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + b^{-4}\ (\ a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$$

$$\underline{a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + a^{-3}b^{-1}}$$

$$-a^{-3}b^{-1} + b^{-4}$$

$$\underline{-a^{-3}b^{-1} - a^{-2}b^{-2} - a^{-1}b^{-3}}$$

$$a^{-2}b^{-2} + a^{-1}b^{-3} + b^{-4}$$

$$\underline{a^{-2}b^{-2} + a^{-1}b^{-3} + b^{-4}}$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $= a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$.

**বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে ভাগ।**

**7.** গুণনে প্রদর্শিত প্রণালীর ন্যায় বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে ভাগ করা যায়।

উদা. 7. $x^4+5x^3+13x^2+17x+12$ কে $x^2+2x+3$ দ্বারা বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l}
1+2+3 & 1+5+13+17+12\ (1+3+4 \\
 & \underline{1+2+\ 3\phantom{+17+12}} \\
 & 3+10+17\phantom{+12} \\
 & \underline{3+\ 6+\ 9\phantom{+12}} \\
 & 4+\ 8+12 \\
 & \underline{4+\ 8+12}
\end{array}
$$

স্পষ্টতঃ এস্থলে ভাগফলের প্রথম পদটি $x^2$-সম্বলিত হইবে।

সুতরাং পূর্ণ ভাগফল $=x^2+3x+4$.

## প্রশ্নমালা 37

ভাগ কর :

1. $x^4+x^2+1$ কে $x^2+x+1$ দ্বারা
2. $a+a^5+a^6$ কে $a^2+a+1$ দ্বারা
3. $x^6-6x+5$ কে $x^2-2x+1$ দ্বারা
4. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2$ কে $x^2-y^2+a^2$ দ্বারা
5. $a^{12}+4a^6-1$ কে $a^4+a^2-1$ দ্বারা
6. $a^3+b^3-c^3+3abc$ কে $a+b-c$ দ্বারা
7. $8x^3-y^3-27z^3-18xyz$ কে $2x-y-3z$ দ্বারা
8. $a^3b-15b^4-8a^2b^2+a^4+19ab^3$ কে $a^2+3b^2-2ab$ দ্বারা
9. $x^6+4x^5-3x^4-16x^3+2x^2+x+3$ কে $x^3+4x^2+2x+1$ দ্বারা
10. $x^6+y^6-1+3x^2y^2$ কে $x^2+y^2-1$ দ্বারা
11. $x^{12}+2x^6y^6+y^{12}$ কে $x^4+2x^2y^2+y^4$ দ্বারা
12. $a^9-b^9$ কে $a^2+ab+b^2$ দ্বারা
13. $\frac{1}{8}x^3-\frac{17}{20}x^2y+\frac{41}{60}xy^2-\frac{1}{15}y^3$ কে $\frac{1}{2}x^2-3xy+\frac{1}{3}y^2$ দ্বারা
14. $\frac{1}{4}a^4+b^4$ কে $\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}b^2-\frac{3}{2}ab$ দ্বারা

15. $\frac{9}{8}a^4 - \frac{3}{2}a^3b + \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{2}{9}b^4$ কে $\frac{3}{2}a^2 - ab - \frac{2}{3}b^2$ দ্বারা

16. $pcx^3 + (cq + dp)x^2 + (cr + dq)x + dr$ কে $cx + d$ দ্বারা

17. $apx^3 - (bp + aq)x^2 + (cp + bq)x - cq$ কে $ax^2 - bx + c$ দ্বারা

18. $(a+b)px^3 - \{(a+b)q + cp\}x^2 + (dp + cq)x - dq$ কে
$(a+b)x^2 - cx + d$ দ্বারা

ভাগফল নির্ণয় কর :

19. $x^{\frac{5}{2}} \div x^{\frac{1}{2}}$ 20. $x^3 \div x^{\frac{3}{2}}$ 21. $12x^{\frac{2}{3}} \div 6x^{\frac{1}{2}}$

22. $x^{-1} \div x^{-2}$ 23. $x^{-3} \div x^{-1}$ 24. $18x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{-1}$

25. $a^{-\frac{2}{3}} \div a^{-1}$ 26. $a^{-\frac{2}{5}} \div a^{-\frac{7}{5}}$ 27. $a^2b^{-1} \div ab^{-\frac{1}{3}}$

28. $1 + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 21a$ কে $1 + 3a^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা

29. $12a^{\frac{2}{3}} - 20a^{\frac{1}{3}} + 41 - 15a^{-\frac{1}{3}} + 24a^{-\frac{2}{3}}$ কে $3a^{\frac{1}{3}} - 5 + 8a^{-\frac{1}{3}}$ দ্বারা

30. $a^{\frac{4}{3}} - 4a^{\frac{2}{3}} + 3 - 6a^{-\frac{1}{3}}$ কে $3a^{-\frac{1}{3}} + a + 2a^{\frac{2}{3}}$ দ্বারা.

বিচ্ছিন্ন-সহগ প্রণালীতে ( By the method of detached co-efficient ) ভাগ কর :

31. $6x^5 + 4x^4 - 20x^3 - 21x^2 - 21x + 10$ কে $3x^2 + 5x - 2$ দ্বারা

32. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ কে $x^2 + x - 6$ দ্বারা

33. $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 31x + 15$ কে $x^3 - 7x + 5$ দ্বারা

34. দুইটি রাশিমালার গুণফল $6a^6 - 19a^5 + 6a^3 - 3a + 2$ ; উহাদের একটি $3a^2 - 2a + 1$ ; অপরটি কত ?

35. $a^2 + a + 41$কে কোন্ রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $a^6 + 3a^5 + 46a^4 + 89a^3 + 132a^2 + 169a + 205$ হয় ?

36. দুইটি রাশিমালার গুণফল $\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{17}{72}x - \frac{1}{12}$ ; উহাদের একটি $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ হইলে, অপরটি কত ?

---

# একাদশ অধ্যায়

## সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

1. ষষ্ঠ অধ্যায়ে বিশেষ ধরণের গুণফল নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত প্রণালী হিসাবে $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ এবং $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ এই সূত্র তিনটি এবং উহাদের প্রয়োগ আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে আরও কয়েকটি সূত্র এবং উহাদের প্রয়োগ আলোচিত হইতেছে।

2. **সূত্র : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$**

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \cdots\cdots (i)\\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \qquad \cdots\cdots (ii)\end{aligned}$$

3. সূত্রের $(ii)$ আকার হইতে যথাক্রমে $3ab(a+b)$ ও $(a^3+b^3)$-কে পক্ষান্তর করিয়া দুইটি অনুসিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

**অনুসিদ্ধান্ত 1.** $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

**অনুসিদ্ধান্ত 2.** $(a+b)^3 - (a^3+b^3) = 3ab(a+b)$

4. **সূত্রের প্রয়োগ।**

**উদা. 1.** $2x+3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(i)$ অনুসারে,
$$\begin{aligned}(2x+3)^3 &= (2x)^3 + 3.(2x)^2.(3) + 3.(2x).(3)^2 + (3)^3\\ &= 8x^3 + 3.4x^2.3 + 3.2x.9 + 27\\ &= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27.\end{aligned}$$

$(ii)$ অনুসারে,
$$\begin{aligned}(2x+3)^3 &= (2x)^3 + (3)^3 + 3.(2x).(3).(2x+3)\\ &= 8x^3 + 27 + 18x(2x+3)\\ &= 8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x\\ &= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27.\end{aligned}$$

সূত্রের $(i)$ বা $(ii)$ যে কোন আকার ধরিয়াই উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 2. $3a^2+5b^3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(3a^2+5b^3)^3 &= (3a^2)^3+3.(3a^2)^2.(5b^3)+3.(3a^2).(5b^3)^2+(5b^3)^3\\ &= 27a^6+3.9a^4.5b^3+3.3a^2.25b^6+125b^9\\ &= 27a^6+135a^4b^3+225a^2b^6+125b^9.\end{aligned}$$

উদা. 3. $(35)^3$ কত হইবে বৈজিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(35)^3 &= (30+5)^3=(30)^3+(5)^3+3\times30\times5\times(30+5)\\ &= 27000+125+450\times35\\ &= 27000+125+15750=42875.\end{aligned}$$

উদা. 4. $a+b+c$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \{(a+b)+c\}^3\\ &= (a+b)^3+3(a+b)^2.(c)+3(a+b)(c)^2+(c)^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)\\ &\qquad +3c^2(a+b)+c^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2\\ &\qquad +3bc^2+c^3\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\ &\qquad +3c^2a+3ca^2+6abc.\end{aligned}$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(2x+3y)^3+3(2x+3y)^2(y-2x)+3(2x+3y)(y-2x)^2+(y-2x)^3.$$

ধর $a = 2x+3y$

এবং $b = y-2x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{aligned}&= (a+b)^3\\ &= (2x+3y+y-2x)^3\\ &= (4y)^3=64y^3.\end{aligned}$$

উদা. 6. সরল কর :

$$(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$$

ধর $x=a+b-c$

এবং $y=a-b+c$

যোগ করিয়া, $x+y=2a \quad \therefore \; 3(x+y)=6a$

এখন, প্রদত্ত রাশি $= x^3+y^3+3(x+y)\{(a)^2-(b-c)^2\}$
$= x^3+y^3+3(x+y)(a+b-c)(a-b+c)$
$= x^3+y^3+3(x+y)xy$
$= x^3+y^3+3xy(x+y)$
$= (x+y)^3=(2a)^3=8a^3.$

উদা. 7. সরল কর :

$(\cdot 875)^3+3\times(\cdot 875)^2\times\cdot 125+3\times\cdot 875\times(\cdot 125)^2+(\cdot 125)^3$

ধর, $a=\cdot 875$ এবং $b=\cdot 125$, তাহা হইলে $a+b=1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$= (a+b)^3=(1)^3=1.$

উদা. 8. যদি $a+b=7$ এবং $ab=10$ হয়, $a^3+b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (7)^3-3.10.7 \\ &= 343-210 \\ &= 133. \end{aligned}$$

উদা. 9. যদি $x+\frac{1}{x}=4$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^3+\frac{1}{x^3}=52.$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= (x)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= (4)^3-3.4 \\ &= 64-12 \\ &= 52. \end{aligned}$$

*উদা. 10. যদি $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3+\frac{1}{x^3}=0.$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= (x)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 3\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \left[\because \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

উদা. 11. যদি $a+b=4$ হয়, $a^3+b^3+12ab$-এর মান নির্ণয় কর।

$$a^3+b^3+12ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+12ab$$
$$=(4)^3-3ab.4+12ab \qquad [\because a+b=4]$$
$$=64-12ab+12ab$$
$$=64.$$

*উদা. 12. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$$a+b+c=0$$

বা, $a+b=-c$

$$\therefore \; a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3$$
$$=(-c)^3-3ab(-c)+c^3 \qquad [\because a+b=-c]$$
$$=-c^3+3abc+c^3$$
$$=3abc.$$

উদা. 13. যদি $a^3+b^3=9$ এবং $a+b=3$ হয়, $ab$-এর মান নির্ণয় কর।

$$3ab(a+b)=(a+b)^3-(a^3+b^3)$$

বা, $3ab.3=(3)^3-9$

বা, $9ab=27-9=18 \quad \therefore \; ab=2.$

উদা. 14. $x=\frac{2}{3}$ হইলে, $8+36x+54x^2+27x^3$-এর মান নির্ণয় কর।

$$8+36x+54x^2+27x^3=(2)^3+3.2^2.3x+3.2.(3x)^2+(3x)^3$$
$$=(2+3x)^3$$
$$=(2+3\times\tfrac{2}{3})^3$$
$$=(4)^3=64.$$

## প্রশ্নমালা 38

ঘন নির্ণয় কর :

1. $1+2x$ 2. $5x+2$ 3. $a+3b$
4. $4x+3y$ 5. $2a^2+3b^2$ 6. $ax+by$
7. $ax^2+a^2x$ 8. $px^2+q$ 9. $x^3+5y^2$
10. $ab^2+bc$ 11. $5ax+2by$ 12. $4a^3+5b^2$
13. $2a+b+c$ 14. $a^2+bc+d$ 15. $2x+3y+5z$
16. $a^2+b^2+2c^2$

17. সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(i) $(45)^3$ (ii) $(75)^3$ (iii) $(205)^3$

সরল কর :

18. $(ax+by)^3+3(ax+by)^2(ax-by)+3(ax+by)(ax-by)^2+(ax-by)^3$

19. $(x^2+x+1)^3+(x^2-x-1)^3+3(x^2+x+1)^2(x^2-x-1)+3(x^2+x+1)(x^2-x-1)^2$

*20. $(a+b+c)^3+(b-c-a)^3+6b\{b^2-(c+a)^2\}$

*21. $(3x+4y-5z)^3+(5z-3x+4y)^3+24y\{16y^2-(5z-3x)^2\}$

22. $(a+b)^6+3(a+b)^4(a-b)^2+3(a+b)^2(a-b)^4+(a-b)^6$

23. $\cdot327\times\cdot327\times\cdot327+\cdot673\times\cdot673\times\cdot673+3\times\cdot327\times\cdot673(\cdot327+\cdot673)$

24. $(2\cdot671)^3+3\times(2\cdot671)^2\times2\cdot329+3\times2\cdot671\times(2\cdot329)^2+(2\cdot329)^3$

25. মান নির্ণয় কর :

(i) $1+15x+75x^2+125x^3$ এর, যখন $x=\frac{3}{5}$

*(ii) $64x^3+144x^2+108x+30$ এর, যখন $x=\frac{1}{4}$

26. $a^3+b^3$ এর মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $a+b=5$ এবং $ab=4$ (ii) $a+b=8$ এবং $ab=15$

(iii) $a+b=7$ এবং $ab=6$ (iv) $a+b=6$ এবং $ab=8$

27. যদি $x+\frac{1}{x}=p$ হয়, প্রমাণ কর $x^3+\frac{1}{x^3}=p^3-3p$.

28. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

29. যদি $a+b=5$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+15ab=125$.

30. যদি $a+b=c$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+3abc=c^3$.

31. যদি $a=b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3-b^3-c^3=3abc$.

32. যদি $a+b=4$ এবং $ab=3$ হয়, $a^3+b^3=$ কত ?

*33. যদি $a^3+b^3=133$ এবং $a+b=7$ হয়, $ab$ এর মান নির্ণয় কর।

*34. যদি $a^3+b^3=5$ এবং $a-b=1$ হয়, $a^3+b^3$-এর মান নির্ণয় কর।

5. সূত্র : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \cdots\cdots(i)\\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \quad \cdots\cdots(ii)\end{aligned}$$

6. সূত্রের $(ii)$ আকার হইতে, $-3ab(a-b)$ ও $(a^3-b^3)$ কে পক্ষান্তর করিয়া দুইটি অনুসিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠিত করা যায়—

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a^3 - b^3) - (a-b)^3 = 3ab(a-b)$.

7. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $2x-3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(i)$ অনুসারে, $(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.(2x)(3)^2 - (3)^3$
$= 8x^3 - 3.4x^2.3 + 3.2x.9 - 27$
$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.

$(ii)$ অনুসারে, $(2x-3)^3 = (2x)^3 - (3)^3 - 3.2x.3.(2x-3)$
$= 8x^3 - 27 - 18x(2x-3)$
$= 8x^3 - 27 - 36x^2 + 54x$
$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.

সূত্রের $(i)$ বা $(ii)$ যে কোন আকার ধরিয়াই উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 2. $3a^2 - 5b^3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(3a^2 - 5b^3)^3 = (3a^2)^3 - 3.(3a^2)^2.(5b^3) + 3.(3a^2).(5b^3)^2 - (5b^3)^3$
$= 27a^6 - 3.9a^4.5b^3 + 3.3a^2.25b^6 - 125b^9$
$= 27a^6 - 135a^4b^3 + 225a^2b^6 - 125b^9$.

উদা. 3. বৈজিক সূত্রের সাহায্যে 996-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(996)^3 = (1000-4)^3$
$= (1000)^3 - 3.(1000)^2.4 + 3.1000.(4)^2 - (4)^3$
$= 1000000000 - 12000000 + 48000 - 64$
$= 1000048000 - 12000064 = 988047936$.

উদা. 4. $(a-b-c)$-এর ঘন নির্ণয় কর :

$$(a-b-c)^3 = \{(a-b)-c\}^3$$
$$= (a-b)^3 - 3(a-b)^2.(c) + 3(a-b).(c)^2 - (c)^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3c(a^2 - 2ab + b^2) + 3c^2(a-b) - c^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$$
$$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 3ac^2 - 3a^2c + 6abc.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(2x-y+z)^3 - 3(2x-y+z)^2(2x-y-z) + 3(2x-y+z) \times (2x-y-z)^2 - (2x-y-z)^3$$

ধর $a = 2x - y + z$

এবং $b = 2x - y - z$

তাহা হইলে, $a - b = 2z$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= (a-b)^3$

$= (2z)^3$

$= 8z^3$.

উদা. 6. সরল কর : $(\cdot 948) \times (\cdot 948) \times (\cdot 948) - 3 \times (\cdot 948) \times (\cdot 948) \times (\cdot 448) + 3 \times (\cdot 948) \times (\cdot 448) \times (\cdot 448) - (\cdot 448) \times (\cdot 448) \times (\cdot 448)$

ধর $a = \cdot 948$ এবং $b = \cdot 448$, $\therefore a - b = \cdot 5$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= (a-b)^3$

$= (\cdot 5)^3$

$= \cdot 125$.

উদা. 7. যদি $x = 4$ হয়, $27x^3 - 54x^2 + 36x + 5$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
&27x^3 - 54x^2 + 36x + 5 \\
&= (3x)^3 - 3.(3x)^2.(2) + 3.(3x).(2)^2 - (2)^3 + 13 \\
&= (3x-2)^3 + 13 \\
&= (3\times 4 - 2)^3 + 13 \\
&= (10)^3 + 13 \\
&= 1000 + 13 \\
&= 1013.
\end{aligned}$$

*উদা. 8. সরল কর : $(a-b+c)^3 - (a-b-c)^3 - 6c\{(a-b)^2 - c^2\}$

ধর $x = a-b+c$

এবং $y = a-b-c$

$\therefore\ x - y = 2c \qquad \therefore\ 3(x-y) = 6c.$

এখন, প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 3(x-y)\{(a-b+c)(a-b-c)\}$

$$\begin{aligned}
&= x^3 - y^3 - 3(x-y)xy \\
&= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) \\
&= (x-y)^3 \\
&= (2c)^3 = 8c^3.
\end{aligned}$$

উদা. 9. যদি $x - y = 1$ এবং $xy = 12$ হয়, $x^3 - y^3$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) \\
&= (1)^3 + 3.12.1 \\
&= 1 + 36 \\
&= 37.
\end{aligned}$$

উদা. 10. যদি $x - \frac{1}{x} = 2$ হয়, দেখাও যে, $x^3 - \frac{1}{x^3} = 14$

$$\begin{aligned}
x^3 - \frac{1}{x^3} &= (x)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\
&= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x\cdot\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) \\
&= (2)^3 + 3.(2) \\
&= 8 + 6 \\
&= 14.
\end{aligned}$$

উদা. 11. যদি $a-b=5c$ হয়, $a^3-b^3-15abc$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} a^3-b^3-15abc &= (a-b)^3+3ab(a-b)-15abc \\ &= (5c)^3+3ab(5c)-15abc \\ &= 125c^3+15abc-15abc \\ &= 125c^3. \end{aligned}$$

উদা. 12. যদি $a^3-b^3=117$ এবং $a-b=3$ হয়, $ab$-এর মান নির্ণয় কর।

$$3ab(a-b) = (a^3-b^3)-(a-b)^3$$

বা, $\quad 3ab.3 = 117-(3)^3$

বা, $\quad 9ab = 90$

বা, $\quad ab = 10.$

## প্রশ্নমালা 39

ঘন নির্ণয় কর :

1. $2a-3b$ 2. $1-5x$ 3. $4x-3y$
4. $2a^2-5b^2$. 5. $3x^3-5$ 6. $2a^3-5b^3$
7. $a^3-bc$ 8. $5x-3x^2$ 9. $ab^2-a^2b$
10. $a+b-c$ 11. $2a-3b-1$ 12. $a^3+bc-3d$

সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

13. $(89)^3$ 14. $(497)^3$ 15. $(295)^3$

সরল কর :

16. $(4a-3b)^3-3(4a-3b)^2(a-3b)+3(4a-3b)(a-3b)^2-(a-3b)^3$
17. $(p+q-r)^3-3(p+q-r)^2(p-3q-r)+3(p+q-r)(p-3q-r)^2-(p-3q-r)^3$
*18. $(3x+4y)^3-(3x-4y)^3-24y(9x^2-16y^2)$
*19. $(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$
*20. $(a+1)^6-(a-1)^6-12a(a^2-1)^2$
21. $(2{\cdot}357)^3-3\times(2{\cdot}357)^2\times(1{\cdot}857)+3\times(2{\cdot}357)\times(1{\cdot}857)^2-(1{\cdot}857)^3$
22. $({\cdot}926)\times({\cdot}926)\times({\cdot}926)-({\cdot}826)\times({\cdot}826)\times({\cdot}826)-3\times({\cdot}926)\times({\cdot}826)\times({\cdot}1)$

23. $x=2\frac{1}{2}$ হইলে, $64x^3-48x^2+12x-1$ এর মান নির্ণয় কর।

*24. $x=2\frac{1}{3}$ হইলে, $27x^3-135x^2+225x-113$ এর মান নির্ণয় কর।

25. $a^3-b^3$ এর মান নির্ণয় কর, যখন—

(i) $a-b=1$ এবং $ab=2$  (ii) $a-b=3$ এবং $ab=10$

(iii) $a-b=2$ এবং $ab=24$  (iv) $a-b=4$ এবং $ab=5$

26. যদি $x-\frac{1}{x}=2$ হয়, $x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

27. যদি $-\frac{1}{x}=m$ হয়, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

28. যদি $a-b=10$ হয়, $a^3-b^3-30ab$ এর মান কত?

29. যদি $x-y=a$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^3-y^3-3axy=a^3$.

30. যদি $a^2-b^2=c$ হয়, $a^6-b^6-3a^2b^2c$ এর মান কত?

*31. যদি $a^3-b^3=26$ এবং $a-b=2$ হয়, $ab$ এর মান নির্ণয় কর।

*32. যদি $a^3-b^3=784$ এবং $a-b=4$ হয়, $ab$ এর মান নির্ণয় কর।

---

8. সূত্র: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3.$$

9. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে $x^2-3x+9$ কে $x+3$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)\{(x^2-x.3+(3)^2\}$$
$$=(x)^3+(3)^3 \qquad =x^3+27.$$

উদা. 2. $5a^2+6b^3$ ও $25a^4-30a^2b^3+36b^6$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(5a^2+6b^3)(25a^4-30a^2b^3+36b^6)$$
$$=(5a^2+6b^3)\{(5a^2)^2-5a^2.6b^3+(6b^3)^2\}$$
$$=(5a^2)^3+(6b^3)^3 \qquad =125a^6+216b^9.$$

উদা. 3. $2a+b$, $4a^2-2ab+b^2$ ও $8a^3-b^3$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)(8a^3-b^3)$$
$$=(2a+b)\{(2a)^2-2a.b+b^2\}(8a^3-b^3)$$
$$=\{(2a)^3+(b)^3\}(8a^3-b^3)=(8a^3+b^3)(8a^3-b^3)=(8a^3)^2-(b^3)^2$$
$$=64a^6-b^6$$

উদা. 4. সরল কর :

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)+(z+x)(z^2-zx+x^2)$$

প্রদত্ত রাশি $=(x^3+y^3)-(y^3+z^3)+(z^3+x^3)$

$=x^3+y^3-y\quad -z^3+z^3+x^3=2x^3.$

উদা. 5. $27a^3+64b^6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$27a^3+64b^6=(3a)^3+(4b^2)^3$$

$$=(3a+4b^2)\{(3a)^2-3a.4b^2+(4b^2)^2\}$$

$$=(3a+4b^2)(9a^2-12ab^2+16b^4).$$

## প্রশ্নমালা 40

গুণ কর (সূত্রের সাহায্যে) :

1. $25x^2-5x+1$ কে $5x+1$ দ্বারা
2. $9a^2-12ab+16b^2$ কে $3a+4b$ দ্বারা
3. $a^2b^2-4ab+16$ কে $ab+4$ দ্বারা
4. $100x^2-30xy+9y^2$ কে $10x+3y$ দ্বারা
5. $a^4-a^2+1$ কে $a^2+1$ দ্বারা
6. $a^4b^2-6a^2b+36$ কে $a^2b+6$ দ্বারা
7. $ab+bc$ কে $a^2b^2-ab^2c+b^2c^2$ দ্বারা
8. $a^3+5b^6$ কে $a^6-5a^3b^6+25b^{12}$ দ্বারা
9. $a+b$, $a^2-ab+b^2$ ও $a^3-b^3$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।
10. $x+y$, $x^2-xy+y^2$ ও $x^6-x^3y^3+y^6$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

সরল কর :

11. $(5x+6y)(25x^2-30xy+36y^2)-(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ $-(4x+5y)(16x^2-20xy+25y^2)$
12. $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)-(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$ $-(a+b)(a^2-ab+b^2)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

13. $27x^3+64$
14. $1+a^3b^3$
15. $343x^3+8y^3$
16. $125a^3+216b^3$
17. $1000a^6+729b^6$.

**10. সূত্র :** $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3.\end{aligned}$$

**11. সূত্রের প্রয়োগ।**

**উদা. 1.** সূত্রের সাহায্যে $4a^2+6ab+9b^2$ কে $2a-3b$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) &= (2a-3b)\{(2a)^2+2a.3b+(3b)^2\}\\ &= (2a)^3-(3b)^3\\ &= 8a^3-27b^3.\end{aligned}$$

**উদা. 2.** $x-2y$, $x^2+2xy+4y^2$ ও $x^6+8x^3y^3+64y^6$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^6+8x^3y^3+64y^6)\\ &= (x-2y)\{(x)^2+x.2y+(2y)^2\}(x^6+8x^3y^3+64y^6)\\ &= \{(x)^3-(2y)^3\}(x^6+8x^3y^3+64y^6)\\ &= (x^3-8y^3)\{(x^3)^2+x^3.8y^3+(8y^3)^2\}\\ &= (x^3)^3-(8y^3)^3=x^9-512y^9.\end{aligned}$$

**উদা 3.** সরল কর :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$$

প্রদত্ত রাশি $=(a^3-b^3)+(b^3-c^3)+(c^3-a^3)$

$$\begin{aligned}&= a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3\\ &= 0.\end{aligned}$$

**উদা. 4.** $a^9-b^9$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}&a^9-b^9=(a^3)^3-(b^3)^3\\ &= (a^3-b^3)\{(a^3)^2+a^3b^3+(b^3)^2\}\\ &= (a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)\\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6).\end{aligned}$$

## প্রশ্নমালা 41

সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

1. $x^4+x^2+1$ কে $x^2-1$ দ্বারা
2. $16a^4+4a^2+1$ কে $4a^2-1$ দ্বারা
3. $4a^4+6a^2b^2+9b^4$ কে $2a^2-3b^2$ দ্বারা
4. $25x^2+15xy+9y^2$ কে $5x-3y$ দ্বারা
5. $9x^2y^2+12xyz+16z^2$ কে $3xy-4z$ দ্বারা
6. $100a^6+30a^3+9$ কে $10a^3-3$ দ্বারা

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

7. $a-b,\ a^2+ab+b^2$ এবং $a^6+a^3b^3+b^6$
8. $x^2-y^2,\ x^4+x^2y^2+y^4$ এবং $x^{12}+x^6y^6+y^{12}$

সরল কর :

9. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+(3y-4z)(9y^2+12yz+16z^2)$
$+(4z-2x)(16z^2+8zx+4x^2)$
10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)-(c-b)(c^2+bc+b^2)$
$-(a-c)(a^2+ac+c^2)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ( Resolve into factors ) :

11. $8x^3-27$
12. $125x^3-64y^3$
13. $216-125a^3$
14. $a^3b^3-c^3$
15. $64a^6-1$
16. $1000-a^6b^6$

---

**12. সূত্র :**

(i) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(ii) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

(iii) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

(iv) $(x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab$

সাধারণ ভাবে গুণ করিয়া সূত্র চারিটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

**13. সূত্রের প্রয়োগ।**

উদা. 1. $x+3$ ও $x+4$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times4$$
$$=x^2+7x+12.$$

উদা. 2. $x+15$ ও $x-10$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+15)(x-10)=x^2+(15-10)x+15\times(-10)$$
$$=x^2+5x-150.$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x+15)(x-10)=x^2+(15-10)x-15\times 10$
$$=x^2+5x-150$$

উদা. 3. $x-10$ ও $x+8$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-10)(x+8)=x^2+(-10+8)x+(-10)\times 8$$
$$=x^2-2x-80.$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x-10)(x+8)=x^2-(10-8)x-10\times 8$
$$=x^2-2x-80.$$

উদা. 4. $x-7$ ও $x-5$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-7)(x-5)=x^2+(-7-5)x+(-7)\times(-5)$$
$$=x^2-12x+35.$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x-7)(x-5)=x^2-(7+5)x+7\times 5$
$$=x^2-12x+35.$$

উদা. 5. $5x-7$ ও $5x+3$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(5x-7)(5x+3)=(5x)^2+(-7+3)\times 5x+(-7)\times 3$$
$$=25x^2-20x-21.$$

## প্রশ্নমালা 42

সূত্র সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর:

1. $(x+1)(x+3)$
2. $(x+10)(x+7)$
3. $(x+7)(x+9)$
4. $(a-4)(a-3)$
5. $(a-8)(a-5)$
6. $(a+10)(a-1)$
7. $(a-12)(a+5)$
8. $(a+18)(a-25)$
9. $(a-11)(a+10)$
10. $(x^2+5)(x^2-7)$
11. $(a^3+9)(a^3-8)$
12. $(a^2b^2+1)(a^2b^2-7)$
13. $(3x+10)(3x+2)$
14. $(5x^2+16)(5x^2-20)$
15. $(5a^3-3)(5a^3-10)$
16. $(ax^2-13)(ax^2+10)$

---

14. সূত্র:

(i) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$

(ii) $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$

সাধারণ ভাবে গুণ করিয়া সূত্র দুইটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

15. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $x+1$, $x+3$ ও $x+5$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+1)(x+3)(x+5)$$
$$=x^3+(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x+1\times3\times5$$
$$=x^3+9x^2+23x+15.$$

উদা. 2. $x-2$, $x+3$ ও $x-4$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-2)(x+3)(x-4)$$
$$=x^3+(-2+3-4)x^2+\{(-2)\times3+3\times(-4)+(-4)\times(-2)\}x+(-2)\times3\times(-4)$$
$$=x^3-3x^2+(-6-12+8)x+24$$
$$=x^3-3x^2-10x+24.$$

উদা. 3. $x-5$, $x-1$ ও $x-6$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-5)(x-1)(x-6)$$
$$=x^3-(5+1+6)x^2+(5\times1+1\times6+6\times5)x-5\times1\times6$$
$$=x^3-12x^2+41x-30.$$ [ সূত্র (*ii*) ধরিয়া ]

অথবা, $(x-5)(x-1)(x-6)=x^3+(-5-1-6)x^2+\{(-5)\times(-1)+(-1)\times(-6)+(-6)\times(-5)\}x+(-5)\times(-1)\times(-6)$

$$=x^3-12x^2+(5+6+30)x-30$$
$$=x^3-12x^2+41x-30.$$

উদা. 4. $(3x-1)(3x-5)(3x-7)=$ কত?

প্রদত্ত রাশি

$$=(3x)^3-(1+5+7)\times(3x)^2+(1\times5+5\times7+7\times1)\times(3x)-1\times5\times7$$
$$=27x^3-13\times9x^2+(5+35+7)\times3x-35$$
$$=27x^3-117x^2+141x-35.$$

## প্রশ্নমালা 43

সূত্র সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x+3)(x+4)(x+5)$
2. $(x+1)(x+3)(x+5)$
3. $(x+2)(x+5)(x+6)$
4. $(x+2)(x-3)(x+5)$
5. $(x-1)(x-2)(x+3)$
6. $(x-10)(x+2)(x+3)$
7. $(x-1)(x-2)(x-3)$
8. $(x-2)(x-4)(x-6)$
9. $(2x+1)(2x+3)(2x+7)$
10. $(3a^2+5)(3a^2+1)(3a^2+4)$
11. $(4x-1)(4x-3)(4x+5)$
12. $(3x^2-1)(3x^2-5)(3x^2-8)$
13. $(5x-3)(5x-4)(5x-10)$
14. $(3x^3-1)(3x^3-4)(3x^3-5)$

# দ্বাদশ অধ্যায়

## উৎপাদক নির্ণয় ও অভেদ

### উৎপাদক নির্ণয়

1. **উৎপাদক।** কোন রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে শেষোক্ত রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির **গুণনীয়ক** বা **উৎপাদক** (factor) বলে। $5 \times a \times b = 5ab$, সুতরাং 5, $a$, $b$ প্রত্যেকে $5ab$-এর গুণনীয়ক বা উৎপাদক ; $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$, সুতরাং $(a+b)$ ও $(a-b)$ প্রত্যেকে $a^2 - b^2$ এর গুণনীয়ক বা উৎপাদক।

2. **উৎপাদক নির্ণয়।** দ্বিপদ, ত্রিপদ বা বহুপদ রাশিমালার প্রত্যেক পদে একই সাধারণ উৎপাদক ( common factor ) থাকিলে প্রথমতঃ উক্ত উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইয়া একটি বন্ধনী আরম্ভ করিতে হয়। এই বন্ধনীর মধ্যে রাশিমালার প্রত্যেক পদকে সাধারণ উৎপাদক দ্বারা ভাগ করিলে যে যে ভাগফল হয় সেই সেই ভাগফল এক একটি করিয়া স্ব স্ব চিহ্ন সহ লিখিয়া বন্ধনী শেষ করিতে হয়।

উদা. 1. $2x + 4y$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$2x + 4y$
$= 2(x + 2y)$

উভয় পদে 2 সাধারণ উৎপাদক। 2 কে বাহির করিয়া লইয়া একটি বন্ধনী আরম্ভ করা হইয়াছে। এই বন্ধনীর মধ্যে $2x \div 2 = x$ এবং $4y \div 2 = 2y$, + চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া লিখিয়া বন্ধনী শেষ করা হইয়াছে।

উদা. 2. $4x^2y - 6xy^2 + 8xyz$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$4x^2y - 6xy^2 + 8xyz$
$= 2xy(2x - 3y + 4z)$

4, 6, 8 এর সাধারণ উৎপাদক 2.
$x^2y$, $xy^2$, $xyz$ এর সাধারণ উৎপাদক $xy$.
প্রতি পদে $2xy$ সাধারণ উৎপাদক বলিয়া $2xy$ কে বাহির করিয়া লইয়া বন্ধনী আরম্ভ করা হইয়াছে। এই বন্ধনীর মধ্যে $4x^2y \div 2xy = 2x$, $-6xy^2 \div 2xy = -3y$ এবং $8xyz \div 2xy = +4z$, লিখিয়া বন্ধনী শেষ করা হইয়াছে।

উদা. 3. $x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)$
$=(a+b+c)(x+y+z)$

বন্ধনীসহ সাধারণ উৎপাদক $(a+b+c)$ বাহির করিয়া লইয়া পুনরায় বন্ধনী আরম্ভ করা হইয়াছে এবং বন্ধনীর মধ্যে $x+y+z$ লিখিয়া বন্ধনী শেষ করা হইয়াছে।

উদা. 4. $ax+bx+cx+ay+by+cy$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$ax+bx+cx+ay+by+cy$$
$$=x(a+b+c)+y(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(x+y)$$

উদা. 5. $x^2(a+b)-(y+z)(a+b)$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^2(a+b)-(y+z)(a+b)$$
$$=(a+b)\{x^2-(y+z)\}$$
$$=(a+b)(x^2-y-z).$$

উদা. 6. $(a-b)(a+b)+(a-b)(b+c)+(a-b)(c+a)$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$(a-b)(a+b)+(a-b)(b+c)+(a-b)(c+a)$$
$$=(a-b)\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}$$
$$=(a-b)(2a+2b+2c)$$
$$=(a-b)2(a+b+c)$$
$$=2(a-b)(a+b+c).$$

উদা. 7. $x^3-x^2+x-1$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+1.(x-1)=(x-1)(x^2+1).$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। কোন রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে সর্বপ্রথম লক্ষ্য করিতে হয় যে উহার পদগুলির মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক আছে কিনা। সাধারণ উৎপাদক থাকিলে প্রথমেই অথবা যখনই পাওয়া যাইবে উহা বাহির করিয়া লইতে হয়।

## প্রশ্নমালা 44

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $5x+10y$
2. $ab+bc$
3. $2x^2-3xy$
4. $a^3b^2-a^2b^3$
5. $18a^3b^2c+42a^2b^3d$
6. $4a^4-4a^3$
7. $a^2b-ab^2-abc$
8. $a^3b^2c-a^2b^3c-a^2b^2c^2$
9. $42a^2b-49ab^2+70abc$
10. $(a-b)x-(a-b)y$
11. $a(x-y)+(b+c)(x-y)$
12. $(a+b)(x^2+y^2)-(c+d)(x^2+y^2)$
13. $a^2(x-y)+b^2(x-y)+(x-y)$
14. $x(b+c+d)+y(b+c+d)+z(b+c+d)$
15. $2x(a-b)^2+3y(a-b)^2-z(a-b)^2$
16. $(x+y)(b+c)+(x+y)(c+a)+(x+y)(a+b)$
17. $x^3+x^2+x+1$
18. $2x^3-2x^2-x+1$
19. $x^5+x^4+x^3+x^2$
20. $ax+bx+cx+ay+by+cy+az+bz+cz$
21. $3(x+y)^2+5(a+b)(x+y)$

---

### সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়।

**3.** ষষ্ঠ ও একাদশ অধ্যায়ে কয়েকটি বৈজিক সূত্র ও উহাদের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এস্থলেও উহাদের সাহায্যে বৈজিক রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের প্রণালী উদাহরণ সাহায্যে প্রদর্শিত হইতেছে।

**4.** সূত্র : $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ এবং $a^2-2ab+b=(a-b)^2$.

(i) $a^2+2ab+b^2$
$=a^2+ab+ab+b^2$
$=a(a+b)+b(a+b)$
$=(a+b)(a+b)$
$=(a+b)^2$.

(ii) $a^2-2ab+b^2$
$=a^2-ab-ab+b^2$
$=a(a-b)-b(a-b)$
$=(a-b)(a-b)$
$=(a-b)^2$.

5. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $9x^4+24x^2y^2+16y^4$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$9x^4+24x^2y^2+16y^4$$
$$=(3x^2)^2+2.3x^2.4y^2+(4y^2)^2$$
$$=(3x^2+4y^2)^2.$$

উদা. 2. $(a+b)^4-4(a+b)^2c+4c^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$(a+b)^4-4(a+b)^2c+4c^2$$
$$=\{(a+b)^2\}^2-2(a+b)^2.2c+(2c)^2$$
$$=\{(a+b)^2-2c\}^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2-2c)^2.$$

উদা. 3. $196x^4-112x^2y^2+16y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$196x^4-112x^2y^2+16y^4$$
$$=4(49x^4-28x^2y^2+4y^4)$$
$$=4\{(7x^2)^2-2.7x^2.2y^2+(2y^2)^2\}$$
$$=4(7x^2-2y^2)^2.$$

## প্রশ্নমালা 45

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $4a^2+4a+1$
2. $x^2-30x+225$
3. $25x^2-40xy+16y^2$
4. $64a^4-160a^2+100$
5. $36a^4+120a^2+100$
6. $25a^2b^2-10abc+c^2$
7. $81a^6+90a^3+25$
8. $49a^4-2100a^2b^2+22500b^4$
9. $(a+b)^2+6(a+b)+9$
10. $(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$
11. $4(a-b)^2-12(a-b)c+9c^2$
12. $(a-b)^2x^4-8(a^2-b^2)x^2y^2+16(a+b)^2y^4$ (M. U. 1906)

---

6. সূত্র : $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

$$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2$$
$$=a(a+b)-b(a+b)$$
$$=(a+b)(a-b).$$

7. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $25x^2 - 81y^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$25x^2 - 81y^2 = (5x)^2 - (9y)^2$$
$$= (5x + 9y)(5x - 9y).$$

উদা. 2. $(x+y)^2 - (y-z)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$(x+y)^2 - (y-z)^2$$
$$= \{(x+y) + (y-z)\}\{(x+y) - (y-z)\}$$
$$= (x+y+y-z)(x+y-y+z)$$
$$= (x+2y-z)(x+z).$$

উদা. 3. $16x^4 - 81y^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$16x^4 - 81y^4 = (4x^2)^2 - (9y^2)^2$$
$$= (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$$
$$= \{(2x)^2 - (3y)^2\}(4x^2 + 9y^2)$$
$$= (2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2).$$

উদা. 4. $9(a+b)^2 - 16(c-d)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$9(a+b)^2 - 16(c-d)^2$$
$$= \{3(a+b)\}^2 - \{4(c-d)\}^2$$
$$= (3a+3b)^2 - (4c-4d)^2$$
$$= \{(3a+3b) + (4c-4d)\}\{(3a+3b) - (4c-4d)\}$$
$$= (3a+3b+4c-4d)(3a+3b-4c+4d).$$

## প্রশ্নমালা 46

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^2 - 9b^2$
2. $4x^2 - 25y^2$
3. $a^2b^2 - 49c^2$
4. $121 - 81a^2$
5. $64x^2 - 169y^2$
6. $625 - 9a^4$
7. $15a^4 - 135a^2b^2$
8. $2a^3 - 32ab^4$
9. $625x^4 - y^2$
10. $36x^2y^2 - 225z^2$
11. $a^4 - b^4$
12. $81a^4 - 1$
13. $625a^4 - 81b^4$
14. $(a+b)^2 - (c+d)^2$
15. $(x-y)^2 - (y-z)^2$
16. $16 - (p+q+r)^2$
17. $4(a+b)^2 - 25$
18. $(x+y)^2 - 9(y-z)^2$

19. $25(3a-2b)^2-36(a+3b)^2$

20. $a^2b^2(c-d)^2-a^2(c+d)^2$

21. $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2$

22. $(2a-b-c)^2-(a+2b-c)^2$

23. $px^3(2q-r)^2-pxy^2(q-2r)^2$

---

8. দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 1. $a^4+a^2b^2+b^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &= a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &= (a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab) \\ &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$ ইহার প্রয়োজন এত বেশী যে ইহাকে সূত্ররূপে মুখস্থ রাখা উচিত।

প্রয়োজনমত যে কোন রাশির সহিত একই রাশি একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিলে মূল রাশির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। কিন্তু এই যোগ ও বিয়োগে উৎপাদক বিশ্লেষণ কার্য সহজতর হয়।

উদা. 2. $4a^4+81$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} 4a^4+81 &= (2a^2)^2+(9)^2+2.2a^2.9-2.2a^2.9 \\ &= (2a^2+9)^2-(6a)^2 \\ &= (2a^2+9+6a)(2a^2+9-6a) \\ &= (2a^2+6a+9)(2a^2-6a+9). \end{aligned}$$

উদা. 3. $20x^4y+5y^5$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} 20x^4y+5y^5 &= 5y(4x^4+y^4) \\ &= 5y(4x^4+4x^2y^2+y^4-4x^2y^2) \\ &= 5y\{(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2\} \\ &= 5y(2x^2+2xy+y^2)(2x^2-2xy+y^2) \end{aligned}$$

উদা. 4. $x^2-2y-1-y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} x^2-2y-1-y^2 &= x^2-(y^2+2y+1) \\ &= (x)^2-(y+1)^2 \\ &= (x+y+1)(x-y-1). \end{aligned}$$

উদা. 5. $a^2-b^2-c^2+d^2-2ad+2bc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^2-b^2-c^2+d^2-2ad+2bc$$
$$=(a^2+d^2-2ad)-(b^2+c^2-2bc)$$
$$=(a-d)^2-(b-c)^2$$
$$=(a-d+b-c)(a-d-b+c)=(a+b-c-d)(a-b+c-d).$$

উদা. 6. $a^2-4ab-12bc-9c^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^2-4ab-12bc-9c^2$$
$$=a^2-4ab+4b^2-4b^2-12bc-9c^2 \quad [\ 4b^2 \text{ যোগ ও বিয়োগ করিয়া }]$$
$$=(a^2-4ab+4b^2)-(4b^2+12bc+9c^2)$$
$$=(a-2b)^2-(2b+3c)^2$$
$$=(a-2b+2b+3c)(a-2b-2b-3c)=(a+3c)(a-4b-3c).$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $a^2-4ab-12bc-9c^2$

$$=(a^2-9c^2)-(4ab+12bc)$$
$$=(a+3c)(a-3c)-4b(a+3c)$$
$$=(a+3c)(a-3c-4b).$$

উদা. 7. $9x^2-16y^2+6x-40y-24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$9x^2-16y^2+6x-40y-24$$
$$=9x^2+6x+1-16y^2-40y-25$$
$$=(9x^2+6x+1)-(16y^2+40y+25)$$
$$=(3x+1)^2-(4y+5)^2$$
$$=(3x+1+4y+5)(3x+1-4y-5)$$
$$=(3x+4y+6)(3x-4y-4).$$

## প্রশ্নমালা 47

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^4+a^2+1$
2. $a^4b^4+a^2b^2c^2+c^4$
3. $4x^4+1$
4. $a^4+64$
5. $a^4+3a^2b^2+4b^4$
6. $x^4-7x^2+1$
7. $a^8+a^4+1$
8. $a^8+a^4b^4+b^8$
9. $9x^4+576$
10. $x^4-32x^2+4$
11. $1-a^2-2ab-b^2$
12. $9x^2-6xy+y^2-4z^2$
13. $x^4-4x^2y^2+4y^4-1$
14. $a^2+2ab-2bc-c^2$
15. $a^2+b^2-2ab-c^2-d^2+2cd$

16. $4x^2 - y^2 + 9z^2 - 12zx - 1 - 2y$
17. $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 12yz - 9z^2$
18. $a^2 - 10a - b^2 - 4b + 21$
19. $(x^2 - 6y) - (4y^2 + 3x)$
20. $2x^4 - 22x^2y^2 + 2y^4$
21. $3x^4 + 6x^2 + 27$
22. $9a^4 - 28a^2 + 16$
23. $9a^4 + 47a^2 + 64$
24. $16x^4 + 71x^2 + 81$
25. $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$
26. $4x^2 - 4xy - 2yz - z^2$
27. $81x^8 - 7x^4y^4 + y^8$ (M. U. 1929)
28. $x^4 - 53x^2 + 4$
29. $x^4 - 7x^2 + 9 - 4y^2 + 4xy$
30. $a^2 - 4a + 3 - y^2 + 2y$
31. $a^2 - 6a + 8 - y^2 + 2y$
*32. $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy$ (Pat. U. 1933)
33. $(x - y)^2 - (1 - xy)^2$ (D. B. 1943)
*34. $4(xy - ab)^2 - (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2$

---

9. সূত্র :

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3.$

(ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = (a-b)^3.$

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
$= a^2(a+b) + 2ab(a+b) + b^2(a+b)$
$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$
$= (a+b)(a+b)^2$
$= (a+b)^3.$

(ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$
$= a^2(a-b) - 2ab(a-b) + b^2(a-b)$
$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$
$= (a-b)(a-b)^2$
$= (a-b)^3.$

10. সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $27x^3+54x^2+36x+8$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(3x)^3+3.(3x)^2.2+3.3x.(2)^2+(2)^3$
$=(3x+2)^3$.

উদা. 2. $125x^6-225x^4y^2+135x^2y^4-27y^6$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(5x^2)^3-3.(5x^2)^2.3y^2+3.5x^2.(3y^2)^2-(3y^2)^3$
$=(5x^2-3y^2)^3$.

উদা. 3. $8(2a+b)^3-60(2a+b)^2(a-b)+150(2a+b)(a-b)^2$ $-125(a-b)^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $2a+b=x$ এবং $a-b=y$,

তাহা হইলে প্রদত্ত রাশি $=8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$
$=(2x)^3-3.(2x)^2.5y+3.2x.(5y)^2-(5y)^3$
$=(2x-5y)^3$
$=\{2(2a+b)-5(a-b)\}^3$
$=(4a+2b-5a+5b)^3$
$=(7b-a)^3$.

## প্রশ্নমালা 48

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $27x^3+27x^2+9x+1$
2. $125x^3-150x^2+60x-8$
3. $8a^3+84a^2b+294ab^2+343b^3$
4. $1-24x+192x^2-512x^3$
5. $64x^3-144x^2+108x-27$
6. $216a^6+540a^4b^2+450a^2b^4+125b^6$
7. $8a^3b^3-12a^2b^2c+6abc^2-c^3$
8. $250a^4b+600a^3b^2+480a^2b^3+128ab^4$

*9. $8(a+b)^3+27c^3+18c(a+b)(2a+2b+3c)$

*10. $(a^2+1)^3-(7a-11)^3-3(a^2+1)(7a-11)(a^2-7a+12)$

---

11. সূত্র : (i) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(i) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$= (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\}$
$= (a+b)(a^2+b^2+2ab-3ab)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2).$

অথবা, $a^3+b^3 = a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$
$= a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2).$

(ii) $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$
$= (a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$
$= (a-b)(a^2+b^2-2ab+3ab)$
$= (a-b)(a^2+ab+b^2).$

অথবা, $a^3-b^3 = a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$
$= a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$
$= (a-b)(a^2+ab+b^2).$

**12. সূত্রের প্রয়োগ।**

**উদা. 1.** $8x^3+27y^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$8x^3+27y^3 = (2x)^3+(3y)^3$
$=(2x+3y)\{(2x)^2-2x.3y+(3y)^2\}$
$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$

**উদা. 2.** $54x^4y-250xy^7$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$54x^4y-250xy^7 = 2xy(27x^3-125y^6)$
$= 2xy\{(3x)^3-(5y^2)^3\}$
$= 2xy(3x-5y^2)\{(3x)^2+3x.5y^2+(5y^2)^2\}$
$= 2xy(3x-5y^2)(9x^2+15xy^2+25y^4).$

**উদা. 3.** $a^6-b^6$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$a^6-b^6 = (a^3)^2-(b^3)^2$
$= (a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).$

**উদা. 4.** $(x^2+4y^2)^3+64x^3y^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$(x^2+4y^2)^3+64x^3y^3$
$=(x^2+4y^2)^3+(4xy)^3$
$=\{(x^2+4y^2)+4xy\}\{(x^2+4y^2)^2-(x^2+4y^2).4xy+(4xy)^2\}$
$=(x^2+4y^2+4xy)(x^4+8x^2y^2+16y^4-4x^3y-16xy^3+16x^2y^2)$
$=(x+2y)^2(x^4-4x^3y+24x^2y^2-16xy^3+16y^4)$

## প্রশ্নমালা 49

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $27x^3+1$
2. $8x^3+125y^3$
3. $64x^3-1$
4. $3a^4-24ab^3$
5. $x^9+y^9$
6. $27x^6-64y^6$
7. $x^6-729$
8. $729x^3-8y^6$
9. $343x^3+8$
10. $x^{12}-y^{12}$
11. $125x^5y^2-27x^2y^5$
12. $(a-b)^3+(b-c)^3$
13. $8x^3-(y+z)^3$
14. $8(x-y)^3-27(y-z)^3$
15. $(a+b)(x-y)^3+(a+b)(y-z)^3$
16. $(4a^2+1)^3-64a^3$
*17. $8(a-b)^4-a+b$

### 13. $x^2+px+q$ আকারের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়।

**প্রথম প্রণালী :** ধর $x^2+px+q$-এর উৎপাদক $x+a$ এবং $x+b$ ; তাহা হইলে উৎপাদক দুইটির গুণফল হইবে $x^2+px+q$ এর সমান।

অর্থাৎ $x^2+px+q=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

তাহা হইলে $p=a+b$ এবং $q=ab.$

দেখা যাইতেছে $x^2+px+q$-এর উৎপাদক হইবে $(x+a)(x+b)$, যখন $p=a+b$ এবং $q=ab.$ অর্থাৎ $x^2+px+q$-এর উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে $q$-এর এমন দুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি $p.$

উদা. 1. $x^2+8x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

এস্থলে 12-এর এমন দুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি 8 ; অর্থাৎ এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি 8 এবং গুণফল 12.

12-এর দুইটি উৎপাদক হইতে পারে, 1, 12 ; 2, 6 ; 3, 4. ইহাদের মধ্যে শুধু 2 ও 6-এর সমষ্টি 8. সুতরাং $x^2+8x+12$-এর নির্ণেয় উৎপাদক হইল $x+2$ এবং $x+6$.

কার্যতঃ প্রয়োজনীয় সংখ্যা দুইটি ( এস্থলে 2, 6 ) মনে মনে স্থির করিয়া নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হয়।

$$x^2+8x+12=x^2+2x+6x+12$$ [ এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের সমষ্টি 8 এবং গুণফল 12 ]

$$=x(x+2)+6(x+2)$$

$$=(x+2)(x+6).$$

**দ্বিতীয় প্রণালী :** $x^2+px+q$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করা যায়।

$$x^2+px+q$$
$$=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$ [ $x$-এর সহগের অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া ]
$$=\left\{x^2+2.x.\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right\}-\frac{p^2}{4}+q$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2-4q}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$
$$=\left\{x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}.$$

উদা. 2. $x^2+8x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$x^2+8x+12=x^2+8x+(\frac{8}{2})^2-(\frac{8}{2})^2+12$ [ $x$-এর সহগ 8-এর অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া ]
$=x^2+8x+(4)^2-16+12$
$=(x+4)^2-(2)^2=(x+4+2)(x+4-2)=(x+6)(x+2)$,

উদা. 3. $x^2-7x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

**প্রথম প্রণালী :** $x^2-7x+12$
$=x^2-3x-4x+12$
$=x(x-3)-4(x-3)$
$=(x-3)(x-4)$.
[ এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি $-7$ এবং গুণফল 12 ]

**দ্বিতীয় প্রণালী :**

$x^2-7x+12=x^2-7x+(-\frac{7}{2})^2-(-\frac{7}{2})^2+12$
$=x^2+2.x.(-\frac{7}{2})+(-\frac{7}{2})^2-(-\frac{7}{2})^2+12$
$=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}+12$
$=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$
$=(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2})=(x-3)(x-4)$.
[ $x$-এর সহগ $-7$-এর অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া ]

উদা. 4. $x^2+6x-7$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

**প্রথম প্রণালী :** $x^2+6x-7$
$=x^2+7x-x-7$
$=x(x+7)-1(x+7)$
$=(x+7)(x-1)$.
[ এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি 6 এবং গুণফল $-7$ ]

দ্বিতীয় প্রণালী : $x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + (\frac{6}{2})^2 - (\frac{6}{5})^2 - 7$

$$= x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 - 7$$
$$= (x+3)^2 - 16 = (x+3)^2 - (4)^2$$
$$= (x+3+4)(x+3-4) = (x+7)(x-1).$$

উদা. 5. $x^2 - 10xy - 264y^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রথম প্রণালী : $x^2 - 10xy - 264y^2$

$$= x^2 - 22xy + 12xy - 264y^2$$
$$= x(x - 22y) + 12y(x - 22y) = (x - 22y)(x + 12y).$$

$[264 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 ; \quad -(11 \times 2) + (2 \times 2 \times 3) = -10]$

দ্বিতীয় প্রণালী : $x^2 - 10xy - 264y^2$

$$= x^2 - 10xy + (5y)^2 - (5y)^2 - 264y^2$$
$$= (x - 5y)^2 - 25y^2 - 264y^2 = (x - 5y)^2 - (17y)^2$$
$$= (x - 5y + 17y)(x - 5y - 17y) = (x + 12y)(x - 22y).$$

উদা. 6. $x^4 - 14x^2y^2 - 95y^4$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^4 - 14x^2y^2 - 95y^4$$
$$= x^4 - 19x^2y^2 + 5x^2y^2 - 95y^4 \quad [-95 = -19 \times 5 ; -19 + 5 = -14]$$
$$= x^2(x^2 - 19y^2) + 5y^2(x^2 - 19y^2)$$
$$= (x^2 - 19y^2)(x^2 + 5y^2).$$

উদা. 7. $3x^3 - 57x^2 - 360x$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$3x^3 - 57x^2 - 360x$$
$$= 3x(x^2 - 19x - 120)$$
$$= 3x(x^2 - 24x + 5x - 120) \quad [-120 = (-24) \times 5 ; \quad -24 + 5 = -19]$$
$$= 3x\{x(x - 24) + 5(x - 24)\}$$
$$= 3x(x - 24)(x + 5).$$

উদা. 8. $2x^5 - 68x^3y^2 + 450xy^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$2x^5 - 68x^3y^2 + 450xy^4 = 2x(x^4 - 34x^2y^2 + 225y^4)$$
$$= 2x(x^4 - 9x^2y^2 - 25x^2y^2 + 225y^4)$$
$$= 2x\{x^2(x^2 - 9y^2) - 25y^2(x^2 - 9y^2)\}$$
$$= 2x(x^2 - 9y^2)(x^2 - 25y^2) = 2x\{(x)^2 - (3y)^2\}\{(x)^2 - (5y)^2\}$$
$$= 2x(x + 3y)(x - 3y)(x + 5y)(x - 5y).$$

উদা. 9. $(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)-36$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $x^2+3x=a$; তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=a^2-16a-36=a^2+2a-18a-36$

$=a(a+2)-18(a+2)=(a+2)(a-18)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)$ [$a$-এর পরিবর্তে $x^2+3x$ ধরিয়া]

$=(x^2+x+2x+2)(x^2+6x-3x-18)$

$=\{x(x+1)+2(x+1)\}\{x(x+6)-3(x+6)\}$

$=(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)$.

## প্রশ্নমালা 50

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $x^2+3x+2$
2. $x^2-3x+2$
3. $x^2+x-2$
4. $x^2-x-2$
5. $x^2+5x+6$
6. $x^2-5x+6$
7. $x^2+7x+6$
8. $x^2-7x+6$
9. $x^2+x-6$
10. $x^2-x-6$
11. $x^2+5x-6$
12. $x^2-5x-6$
13. $x^2+14x+24$
14. $x^2-14x+24$
15. $x^2+10x-24$
16. $x^2-10x-24$
17. $x^2+10x+24$
18. $x^2-10x+24$
19. $x^2+2x-24$
20. $x^2-2x-24$
21. $x^2+25x+24$
22. $x^2-25x+24$
23. $x^2+23x-24$
24. $x^2-23x-24$
25. $x^2-22x+96$
26. $x^2-3x-108$
27. $x^2-14x-480$
28. $x^2-x-110$
29. $x^2-38x-600$
30. $x^2-6x-216$
31. $3x^2+42x-153$
32. $x^3-3x^2-180x$
33. $8x^3-184x^2+816x$
34. $a^2x^2-7abx-78b^2$
35. $a^3x^2+38a^2x-80a$
36. $a^2+77a+1020$
37. $570-11a-a^2$
38. $44-20a^2-a^4$
39. $x^4+39x^2-40$
40. $x^5-10x^3-39x$

দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় কর :

41. $x^2-14x+48$
42. $x^2-17x+72$
43. $x^2-x-132$
44. $x^2+11x-126$
45. $a^4-31a^2+234$
46. $a^4+a^2-2550$
47. $x^2y^2-6xyz-72z^2$

উৎপাদক নির্ণয় কর :

48. $(a+b)^2-17(a+b)+72$

49. $(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-63$

50. $(x^2+5x)^2-3(x^2+5x)-28$

51. $(x^2+y^2)^2-9xy(x^2+y^2)+14x^2y^2$

52. $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$

53. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$

---

**14. $px^2+qx+r$ আকারের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়।**

**প্রথম প্রণালী :**

ধর $px^2+qx+r$ এর উৎপাদক $ax+b$ এবং $cx+d$;

তাহা হইলে এই উৎপাদক দুইটির গুণফল হইবে $px^2+qx+r$ এর সমান।

অর্থাৎ $px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$

$$=acx^2+bcx+adx+bd$$

$$=acx^2+(bc+ad)x+bd.$$

তাহা হইলে $p=ac,\quad q=(bc+ad),\quad r=bd.$

যেহেতু $p=ac$, এবং $r=bd \therefore p\times r=(ac)\times(bd)=(bc)\times(ad).$

দেখা যাইতেছে $px^2+qx+r$-এর উৎপাদক হইবে $(ax+b)(cx+d)$, যখন $pr=(bc)\times(ad)$ এবং $q=bc+ad$, অর্থাৎ, $px^2+qx+r$ এর উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে $pr$-এর এমন দুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি হইবে $q$.

উদা. 1. $12x^2+35x+18$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$12x^2+35x+18$

$=12x^2+8x+27x+18$ [ $12\times18=(2\times2\times3)\times(2\times3\times3)$ ;

$=4x(3x+2)+9(3x+2)$ $\quad (2\times2\times2)+(3\times3\times3)=35$ ]

$=(3x+2)(4x+9).$

**দ্বিতীয় প্রণালী :**

$$px^2+qx+r=p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right).$$
$$=p\left\{x^2+\frac{q}{p}x+\left(\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{r}{p}\right\}$$
$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4p^2}-\frac{r}{p}\right)\right\}$$
$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2-4pr}{4p^2}\right\}$$
$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)^2\right\}$$
$$=p\left\{x+\frac{q}{2p}+\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right\}\left\{x+\frac{q}{2p}-\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right\}.$$

উদা. 2. $12x^2+35x+18$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$12x^2+35x+18=12(x^2+\tfrac{35}{12}x+\tfrac{3}{2})$$
$$=12\{x^2+\tfrac{35}{12}x+(\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{35}{24})^2+\tfrac{3}{2}\}$$

[ $x$-এর সহগ $\frac{35}{12}$-এর অর্ধেক $\frac{35}{24}$ এর বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া ]

$$=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{1225}{576}-\tfrac{3}{2})\}$$
$$=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-\tfrac{361}{576}\}$$
$$=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{19}{24})^2\}=12(x+\tfrac{35}{24}+\tfrac{19}{24})(x+\tfrac{35}{24}-\tfrac{19}{24})$$
$$=12(x+\tfrac{9}{4})(x+\tfrac{2}{3})=4.(x+\tfrac{9}{4}).3(x+\tfrac{2}{3})=(4x+9)(3x+2).$$

উদা. 3. $6x^2+13x-8$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

**প্রথম প্রণালী :** $6x^2+13x-8$

$$=6x^2+16x-3x-8 \quad [6\times(-8)=-48=16\times(-3);$$
$$=2x(3x+8)-1(3x+8) \quad 16-3=13]$$
$$=(3x+8)(2x-1).$$

**দ্বিতীয় প্রণালী :** $6x^2+13x-8=6(x^2+\frac{13}{6}x-\frac{4}{3})$

$$=6\{x^2+\tfrac{13}{6}x+(\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{13}{12})^2-\tfrac{4}{3}\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{169}{144}+\tfrac{4}{3})\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{19}{12})^2\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12}+\tfrac{19}{12})(x+\tfrac{13}{12}-\tfrac{19}{12})\}$$
$$=6(x+\tfrac{8}{3})(x-\tfrac{1}{2})$$
$$=3(x+\tfrac{8}{3}).2(x-\tfrac{1}{2})=(3x+8)(2x-1).$$

উদা. 4. $8x^4+10x^2y^2-3y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$8x^4+10x^2y^2-3y^4$
$=8x^4-2x^2y^2+12x^2y^2-3y^4$ $[8\times(-3)=-24=(-2)\times 12;\ -2+12=10]$
$=2x^2(4x^2-y^2)+3y^2(4x^2-y^2)$
$=(4x^2-y^2)(2x^2+3y^2)$
$=\{(2x)^2-(y)^2\}(2x^2+3y^2)$
$=(2x-y)(2x+y)(2x^2+3y^2)$.

উদা. 5. $3(x+y)^2-2(x+y)-16$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর, $x+y=a$, তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=3a^2-2a-16=3a^2-8a+6a-16$
$=a(3a-8)+2(3a-8)=(a+2)(3a-8)$
$=(x+y+2)\{3(x+y)-8\}$ [$a$-এর পরিবর্তে $x+y$ বসাইয়া]
$=(x+y+2)(3x+3y-8)$.

উদা. 6. $10(a+b)^2+13(a+b)(c+d)-3(c+d)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর, $a+b=x$ এবং $c+d=y$; তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=10x^2+13xy-3y^2$
$=10x^2+15xy-2xy-3y^2$
$=5x(2x+3y)-y(2x+3y)$
$=(2x+3y)(5x-y)$
$=\{2(a+b)+3(c+d)\}\{5(a+b)-(c+d)\}$ [$x$ ও $y$-এর মান বসাইয়া]
$=(2a+2b+3c+3d)(5a+5b-c-d)$.

## প্রশ্নমালা 51

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $2x^2+3x+1$
2. $2x^2-3x+1$
3. $2x^2+x-1$
4. $2x^2-x-1$
5. $2x^2+5x+3$
6. $2x^2-5x+3$
7. $2x^2+x-3$
8. $2x^2-x-3$
9. $3x^2+5x+2$
10. $3x^2-5x+2$
11. $3x^2+x-2$
12. $3x^2-x-2$
13. $3x^2+7x+2$
14. $3x^2-7x+2$
15. $6x^2+7x+1$
16. $6x^2-7x+1$
17. $6x^2+5x-1$
18. $6x^2-5x-1$
19. $3x^2+10x+8$
20. $3x^2-10x+8$
21. $8x^2+10x-3$
22. $3x^2-10x-8$
23. $5x^2+12x-9$
24. $15x^2-19x-8$

25. $15x^2-32x+16$
26. $14a^2b^2-47abc-7c^2$
27. $3x^2-28x+32$
28. $20+x-30x^2$
29. $85a-16-25a^2$
30. $16a^4-22a^2-15$
31. $5x^2-42xy+81y^2$
32. $10x^2-19xy-15y^2$
33. $18m^2-87mn-15n^2$
*35. $3a^5-19a^3b-40ab^2$
34. $6a^4-15a^2b^2-75b^4$
36. $36x^4-181x^2+225$
37. $28x^4+13x^2-5$
38. $9x^4-32x^2y^2-16y^4$
39. $12x^4+17x^2-5$
40. $16x^4y^4-71x^2y^2-45$
41. $8a^4+2a^2-45$
42. $5x^2y^2-2xyz-16z^2$
43. $6x^2-23xy+20y^2$
44. $15x^4+11x^2-12$
45. $35x^2-x-12$
46. $12x^2+65x+77$
47. $18x^3-27x^2-35x$

দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় কর :

48. $4x^2+15x+9$
49. $5x^2-7x-24$
50. $9x^2+18x-40$
51. $3x^2-2x-385$
52. $6x^2-25x-9$
53. $2a^4-5a^2-25$
54. $4x^4-35x^2+24$

উৎপাদক নির্ণয় কর :

55. $3(a-b)^2-20(a-b)-7$
56. $2(a+b)^2-7(a+b)(b-c)-15(b-c)^2$
*57. $8(a+b)^2-10(a^2-b^2)-7(a-b)^2$

---

## অভেদ

**15. অভেদ (Identity)।** সপ্তম অধ্যায়ে সমীকরণ ও অভেদ কাহাকে বলে এবং উহাদের পার্থক্য কি তাহা আলোচিত হইয়াছে। ষষ্ঠ অধ্যায়ে ও একাদশ অধ্যায়ে আলোচিত বৈজিক সূত্রগুলির প্রত্যেকেই এক একটি অভেদ।

অভেদ দুই প্রকার—**নিরপেক্ষ অভেদ** ( Unconditional Identity ) এবং **সাপেক্ষ অভেদ** ( Conditional Identity )। দুইটি রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্য যদি অভেদের উভয় রাশির সমতা অব্যাহত থাকে তবে ঐ প্রকার অভেদকে নিরপেক্ষ অভেদ বলে।

কোন কোন অভেদের উভয় পক্ষের সমতা এক বা একাধিক শর্তের উপর নির্ভর করে ; এই প্রকার অভেদকে সাপেক্ষ অভেদ বলে।

নিরপেক্ষ অভেদ '$\equiv$' চিহ্ন দিয়া সূচিত করিবার রীতি আছে।

16. **নিরপেক্ষ অভেদ (Unconditional Identity)।**

নিরপেক্ষ অভেদ বিষয়ক অঙ্কের সমাধানের নির্দিষ্ট কোন নিয়ম নাই। সাধারণতঃ বাম পক্ষের রাশিটিকে সরল করিয়া দক্ষিণ পক্ষের রাশিটির সমান দেখাইতে হয়। স্থলবিশেষে দক্ষিণ পক্ষের রাশিটিকে সরল করিয়া বাম পক্ষের রাশিটির সমান দেখাইতে হয়। উভয় পক্ষের রাশি দুইটিকে সরল করিয়া একই আকারে পরিণত করিলেও উভয় পক্ষের সমতা প্রতিপন্ন হয়।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $a^2-b^2-c^2-2bc-a-b-c$
$$=(a+b+c)(a-b-c-1).$$

বাম পক্ষ $=a^2-(b^2+c^2+2bc)-(a+b+c)$
$=(a)^2-(b+c)^2-(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a-b-c)-1(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a-b-c-1)=$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $a^2-(a+b)(a+c)=b^2-(b+c)(b+a)$
$$=c^2-(c+a)(c+b).$$

$a^2-(a+b)(a+c)=a^2-(a^2+ca+ab+bc)$
$=a^2-a^2-ca-ab-bc$
$=-(ab+bc+ca)$

$b^2-(b+c)(b+a)=b^2-(b^2+ab+bc+ca)$
$=b^2-b^2-ab-bc-ca$
$=-(ab+bc+ca)$

$c^2-(c+a)(c+b)=c^2-(c^2+bc+ca+ab)$
$=c^2-c^2-bc-ca-ab$
$=-(ab+bc+ca)$

$\therefore\ a^2-(a+b)(a+c)=b^2-(b+c)(b+a)=c^2-(c+a)(c+b).$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,
$$(5a-3b)^3+(3a-5b)^3+24(a-b)(5a-3b)(3a-5b)=512(a-b)^3.$$

ধর, $x=5a-3b$
এবং $y=3a-5b$
$\therefore\ x+y=8a-8b=8(a-b)$ $\therefore\ 3(x+y)=24(a-b)$
$\therefore$ বাম পক্ষ $=x^3+y^3+3(x+y)xy=(x+y)^3$
$=\{8(a-b)\}^3=512(a-b)^3=$ দক্ষিণ পক্ষ।

*উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $a(a+2b)^3 - b(b+2a)^3 = (a+b)(a-b)^3$

বাম পক্ষ $= a\{(a+b)+b\}^3 - b\{(a+b)+a\}^3$

$$= a[(a+b)^3 + b^3 + 3(a+b)b\{(a+b)+b\}]$$
$$- b[(a+b)^3 + a^3 + 3(a+b)a\{(a+b)+a\}]$$
$$= a(a+b)^3 + ab^3 + 3ab(a+b)\{(a+b)+b\}$$
$$- b(a+b)^3 - a^3b - 3ab(a+b)\{(a+b)+a\}$$
$$= (a-b)(a+b)^3 - ab(a^2-b^2) + 3ab(a+b)(a+b+b$$
$$-a-b-a)$$
$$= (a-b)(a+b)^3 - ab(a+b)(a-b) + 3ab(a+b)(b-a)$$
$$= (a-b)(a+b)^3 - ab(a+b)(a-b) - 3ab(a+b)(a-b)$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a+b)^2 - ab - 3ab\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a+b)^2 - 4ab\}$$
$$= (a-b)(a+b)(a-b)^2$$
$$= (a+b)(a-b)^3$$

= দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে,

$$\{(ax+by)^2 + (ay-bx)^2\}\{(ax+by)^2 - (ay+bx)^2\} = (a^4-b^4)(x^4-y^4)$$

বাম পক্ষ $= \{a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy\}$

$$\times \{a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - a^2y^2 - b^2x^2 - 2abxy\}$$
$$= \{a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2\}\{a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2\}$$
$$= \{a^2(x^2+y^2) + b^2(x^2+y^2)\}\{a^2(x^2-y^2) - b^2(x^2-y^2)\}$$
$$= (x^2+y^2)(a^2+b^2)(x^2-y^2)(a^2-b^2)$$

$= (a^4-b^4)(x^4-y^4) =$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে,

$$(ac-bd)^2 - (bc-ad)^2 = (a^2-b^2)(c^2-d^2)$$

বাম পক্ষ $= \{(ac-bd)+(bc-ad)\}\{(ac-bd)-(bc-ad)\}$

$$= (ac+bc-ad-bd)(ac-bc+ad-bd)$$
$$= \{c(a+b) - d(a+b)\}\{c(a-b) + d(a-b)\}$$
$$= (a+b)(c-d)(a-b)(c+d)$$
$$= (a+b)(a-b)(c+d)(c-d)$$

$= (a^2-b^2)(c^2-d^2) =$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $(3x^2-2)^3+(8x-1)^3+3(3x^2-2)(8x-1)$
$\times(3x^2+8x-3)=(x+3)^3(3x-1)^3$

ধর $3x^2-2=a$ এবং $8x-1=b$,

তাহা হইলে, $a+b=3x^2-2+8x-1=3x^2+8x-3.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$=(a+b)^3$$
$$=(3x^2+8x-3)^3$$
$$=(3x^2+9x-x-3)^3$$
$$=\{3x(x+3)-1(x+3)\}^3$$
$$=\{(x+3)(3x-1)\}^3$$
$$=(x+3)^3(3x-1)^3.$$

## 17. বৈজিক রাশির দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ।

সূত্র : (i) $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

(ii) $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

পূর্ব প্রতিষ্ঠিত সূত্র হইতে, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

বিয়োগ করিয়া, $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ ......(i)

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া, $ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad ......(ii)$$

উদা. 1. $4(2x+y)(x-3y)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$2x+y$ এর পরিবর্তে $a$ এবং $x-3y$ এর পরিবর্তে $b$ ধর।

তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশি $=4ab$

$$=(a+b)^2-(a-b)^2$$
$$=\{(2x+y)+(x-3y)\}^2-\{(2x+y)-(x-3y)\}^2$$
$$=(3x-2y)^2-(x+4y)^2.$$

উদা. 2. $(3a+5b)(a-b)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$3a+5b$ এর পরিবর্তে $x$ এবং $a-b$ এর পরিবর্তে $y$ ধর।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= xy$

$$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$= \left\{\frac{(3a+5b)+(a-b)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(3a+5b)-(a-b)}{2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{4a+4b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2a+6b}{2}\right)^2$$

$$= (2a+2b)^2 - (a+3b)^2.$$

সূত্রের সাহায্য ব্যতীতও বৈজিক রাশিকে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 3. $x^2+2xy-2yz-z^2$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$x^2+2xy-2yz-z^2$

$= x^2+2xy+y^2-y^2-2yz-z^2$ [ $y^2$ যোগ ও বিয়োগ করিয়া ]

$= (x+y)^2-(y^2+2yz+z^2)$

$= (x+y)^2-(y+z)^2.$

উদা. 4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

**প্রথম প্রণালী :**

প্রদত্ত রাশি $= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$ [ এইরূপে সাজান হইয়াছে যে দুই দুইটি উৎপাদকের গুণফলে $x^2$ এবং $x$-এর সহগ সমান হয় ]

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$= (a+4)(a+6)$ [ $x^2+5x$ এর পরিবর্তে $a$ লিখিয়া ]

$= a^2+10a+24$

$= a^2+10a+25-1$

$= (a+5)^2-(1)^2$

$= (x^2+5x+5)^2-(1)^2.$ [ $a$-র পরিবর্তে $x^2+5x$ লিখিয়া ]

দ্বিতীয় প্রণালী :

প্রদত্ত রাশি $= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$= (x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$

$= ab$ [ $a = x^2+3x+2$ এবং $b = x^2+7x+12$ ধরিয়া ]

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= \left\{\frac{(x^2+3x+2)+(x^2+7x+12)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x^2+3x+2)-(x^2+7x+12)}{2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{2x^2+10x+14}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4x-10}{2}\right)^2$$

$= (x^2+5x+7)^2 - (-2x-5)^2$

$= (x^2+5x+7)^2 - (2x+5)^2.$

দ্রষ্টব্য। দুই প্রণালীতে উত্তর বিভিন্ন আকারের হইয়াছে বটে, কিন্তু উহাদের মান অভিন্ন।

## 18. বৈজিক রাশির দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ।

সূত্র : $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2.$

পূর্ব প্রতিষ্ঠিত সূত্র হইতে, $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

এবং $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2.$

উদা. 1. $2\{(3a+b)^2+(a+2b)^2\}$ কে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

ধর, $x = 3a+b$ এবং $y = a+2b.$

তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশি $= 2(x^2+y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2$

$= (3a+b+a+2b)^2 + (3a+b-a-2b)^2$

$= (4a+3b)^2 + (2a-b)^2.$

সূত্রের সাহায্য ব্যতীতও বৈজিক রাশিকে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 2. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+212$ কে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। (S. F. 1969)

প্রদত্ত রাশি $=(2x+1)(2x+7)(2x+3)(2x+5)+212$

$=(4x^2+16x+7)(4x^2+16x+15)+212$

$=(a+7)(a+15)+212$ [$4x^2+16x$ এর পরিবর্তে $a$ ধরিয়া]

$=a^2+22a+105+212=a^2+22a+317$

$=a^2+22a+121+196$

$=(a+11)^2+(14)^2=(4x^2+16x+11)^2+(14)^2.$

## প্রশ্নমালা 52

প্রমাণ কর :

1. $(a+2b)^2(a-2b)+(a-2b)^2(a+2b)=2a(a^2-4b^2)$
2. $(a+2b)^2(a-2b)-(a-2b)^2(a+2b)=4b(a^2-4b^2)$
3. $x^3(x+1)(2x-1)+2x^2(2x-1)(x^2+1)-x^2(2x-1)(3x^2+2)$ $=x^3(2x-1)$
4. $\{a^2+bc+a(b+c)\}\{b^2+ca+b(c+a)\}\{c^2+ab+c(a+b)\}$ $=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$
5. $(a^2-b^2)^2-3(a^2-b^2)c^2-4c^4=(a^2-b^2-4c^2)(a^2-b^2+c^2)$
6. $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$
7. $x^3(x-1)(x+2)+2x^2(x-1)(x+1)-x(x-1)(x^3-x-1)$ $=x(x-1)(x+1)^3$
8. $(2a+b)^2+(b+2c)^2=4(a+b+c)^2-2(2a+b)(b+2c)$
9. $a(a-1)(a-2)+3a(a-1)+a=a^3$
10. $(1+a+a^2)^2-(1-a+a^2)^2=4a(1+a^2)$
11. $(a+3b)^3+(3a+b)^3+12(a+b)(a+3b)(3a+b)=64(a+b)^3$
12. $(a+2b+c)^3+(2a+b+2c)^3$ $+9(a+b+c)(a+2b+c)(2a+b+2c)=27(a+b+c)^3$

13. $(a^2+b^2+4ab)^2-(a^2+b^2)^2=8ab(a+b)^2$

14. $(x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)-2x^2y^2=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

15. $(a+b)^2-2(a-c)(b+c)=(a-c)^2+(b+c)^2$

16. $(ac-1)(bx+1)-(bc-1)(ax+1)=(a-b)(x+c)$

17. $(a+b)^2(c-d)^2-(a-b)^2(c+d)^2=4\{ab(c-d)^2-cd(a-b)^2\}$

18. $(1+x^2)(1+y)^2-(1+y^2)(1+x)^2=2(x-y)(xy-1)$

19. $(a+bc)^2-(1-b^2)(1-c^2)$
$=(b+ca)^2-(1-c^2)(1-a^2)$
$=(c+ab)^2-(1-a^2)(1-b^2)$

20. দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(1) $4(a+b)(c+d)$ (2) $4(2a-b)(a-2b)$

(3) $(x+a)(x+b)$ (4) $(7x-2y)(5x+4y)$

(5) $x^2-2x-y^2+2y$ (6) $4x^2-9y^2-12x+30y-16$

(7) $x^2+xy$ (8) $x^2-7x-18$

*(9) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

*(10) $(2x-1)(2x-3)(2x-5)(2x-7)$

21. দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

(1) $2\{(3x+5y)^2+(2x+4y)^2\}$ (2) $2\{(a+2b-3c)^2+(a-b+2c)^2\}$

(3) $2\{(x^2+2xy+1)^2+(y^2-2xy+1)^2\}$

*(4) $x(x+1)(x+2)(x+3)+10$

*(5) $(2x-1)(2x-3)(2x+5)(2x+7)+89$

---

19. **সাপেক্ষ অভেদ।** কোন অভেদের সমতা এক বা একাধিক শর্তের উপর নির্ভর করিলে উহাকে **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional Identity) বলে।

উদা. 1. যদি $x+y=1+xy$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$x^3+y^3=1+x^3y^3$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (1+xy)^3-3xy(1+xy)\quad [\because x+y=1+xy] \\ &= (1+xy)^3-3.1.xy(1+xy) \\ &= (1)^3+(xy)^3 \\ &= 1+x^3y^3.\ \text{(প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

উদা. 2. যদি $bx = ay$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\\ &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\ &= a^2x^2+ay.ay+bx.bx+b^2y^2\\ &= a^2x^2+b^2y^2+ay.bx+bx.ay \quad [\because \ bx=ay]\\ &= a^2x^2+b^2y^2+2abxy\\ &= (ax+by)^2. \text{ (প্রমাণিত)}\end{aligned}$$

*উদা. 3. যদি $x^2+y^2=1$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}&(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2\\ &= 9x^2+16x^6-24x^4+16y^6+9y^2-24y^4\\ &= 9(x^2+y^2)-24(x^4+y^4)+16(x^6+y^6)\\ &= 9\times1-24\{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\}+16\{(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)\}\\ &= 9-24\{(1)^2-2x^2y^2\}+16\{(1)^3-3x^2y^2\times1\}\\ &= 9-24(1-2x^2y^2)+16(1-3x^2y^2)\\ &= 9-24+48x^2y^2+16-48x^2y^2\\ &= 9+16-24\\ &= 1. \text{ (প্রমাণিত)}\end{aligned}$$

উদা. 4. যদি $a+b = 2p$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+6abp = 8p^3$

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+6abp\\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)+6abp\\ &= (2p)^3-3ab.2p+6abp \quad [\because \ a+b=2p]\\ &= 8p^3-6abp+6abp\\ &= 8p^3. \text{ (প্রমাণিত)}\end{aligned}$$

*উদা. 5. যদি $a+b+c = 0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$a^2-bc = b^2-ca = c^2-ab$$

$$\begin{aligned}(a^2-bc)-(b^2-ca) &= (a^2-b^2)+(ca-bc)\\ &= (a+b)(a-b)+c(a-b)\\ &= (a-b)(a+b+c)\\ &= (a-b)\times0 \quad [\because \ a+b+c=0]\\ &= 0.\end{aligned}$$

যেহেতু, $(a^2 - bc) - (b^2 - ca) = 0$

$\therefore \; a^2 - bc = b^2 - ca.$ [ পক্ষান্তর করিয়া ]

আবার, $(b^2 - ca) - (c^2 - ab) = (b^2 - c^2) + (ab - ca)$

$$= (b + c)(b - c) + a(b - c)$$
$$= (b - c)(b + c + a)$$
$$= (b - c) \times 0$$
$$= 0.$$

যেহেতু, $(b^2 - ca) - (c^2 - ab) = 0$

$\therefore \; b^2 - ca = c^2 - ab.$ [ পক্ষান্তর করিয়া ]

অতএব, $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab.$

দ্বিতীয় প্রণালী : $a + b + c = 0$

$\therefore \; a = -b - c, \quad b = -c - a, \; c = -a - b$

$\therefore \; a^2 - bc = a.a - bc$

$$= a(-b - c) - bc \quad [\because \; a = -b - c]$$
$$= -ab - ac - bc$$
$$= -(ab + bc + ca)$$

$b^2 - ca = b.b - ca$

$$= b(-c - a) - ca \quad [\because \; b = -c - a]$$
$$= -bc - ab - ca$$
$$= -(ab + bc + ca)$$

তদ্রূপ, $c^2 - ab = -(ab + bc + ca)$

$\therefore \; a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab.$

*উদা. 6. যদি $2s = a + b + c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$(s - a)^3 + (s - b)^3 + 3(s - a)(s - b)c = c^3$

$2s = a + b + c$ বা, $s + s = a + b + c$

$\therefore \; (s - a) + (s - b) = c$

এখন, $(s - a)^3 + (s - b)^3 + 3(s - a)(s - b)c$

$$= (s - a)^3 + (s - b)^3 + 3(s - a)(s - b)\{(s - a) + (s - b)\}$$

$[\because \; c = (s - a) + (s - b)]$

$$= \{(s - a) + (s - b)\}^3$$
$$= c^3. \quad [\because \; (s - a) + (s - b) = c]$$

## প্রশ্নমালা 53

1. যদি $x=y+z$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3-y^3-z^3=3xyz$
2. যদি $2a-3b=1$ হয়, প্রমাণ কর যে, $8a^3-18ab=1+27b^3$
3. যদি $a^2+b^2=1$ এবং $c^2+d^2=1$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$$
4. যদি $x+y=1$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(x^2-y^2)^2=x^3+y^3-xy$

*5. যদি $x=a+\frac{1}{a}$ এবং $y=a-\frac{1}{a}$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$x^4+y^4-2x^2y^2=16$ (C. U. 1944)

6. যদি $p=3+\frac{1}{p}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $p^4=119-\frac{1}{p^4}$

যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে :

7. $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
8. $a(a+b)(a+c)=b(b+c)(b+a)=c(c+a)(c+b)$
9. $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$

*10. $a^2-bc=a^2+ab+b^2=-(ab+bc+ca)$

11. $(b+c)(b-c)+a(a+2b)=0$

যদি $s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে :

12. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=s^3+a^3+b^3+c^3$
13. $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$

যদি $2s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

14. $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$
15. $s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca$

*16. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$

*17. যদি $mx+ny=m$, $nx-my=n$ হয়,
প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$.

# ত্রয়োদশ অধ্যায়

## গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

### ( উৎপাদক সাহায্যে )

## গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

1. **গুণনীয়ক ও গুণিতক।** একটি রাশি অপর একটি রাশি দ্বারা বিভাজ্য ( Divisible ) বলিলে এই বুঝা যায় যে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না।

একটি রাশিকে অপর একটি রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তবে ভাজককে ভাজ্যের **গুণনীয়ক** বা **উৎপাদক** ( Factor ) বলে এবং ভাজ্যকে ভাজক রাশির **গুণিতক** ( Multiple ) বলে ; যথা—

$x$ ও $y$ প্রত্যেকে $xy$-এর গুণনীয়ক এবং $xy$, $x$ ও $y$ প্রত্যেকের গুণিতক। $x+y$ ও $x-y$ প্রত্যেকে $x^2-y^2$-এর গুণনীয়ক এবং $x^2-y^2$, $x+y$ ও $x-y$ এর প্রত্যেকের গুণিতক।

2. **মৌলিক গুণনীয়ক।** যে গুণনীয়ককে অপর কোন গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না তাহাকে **মৌলিক গুণনীয়ক** ( Elementary Factor ) বলে। যথা, $a^3b^2c$-এর মৌলিক উৎপাদক $a, a, a, b, b, c$ ; $a^4-b^4$ এর মৌলিক উৎপাদক $(a-b)$, $(a+b)$, $(a^2+b^2)$.

3. **সাধারণ গুণনীয়ক।** দুই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকটি যদি অপর একটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে ভাজক রাশিটিকে ভাজ্য রাশিগুলির **সাধারণ গুণনীয়ক** ( Common Factor ) বলে। সুতরাং যে গুণনীয়ক দুই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকের গুণনীয়ক তাহাকে উক্ত দুই বা তদধিক রাশির সাধারণ গুণনীয়ক বলে। যথা, $ax$, $ax^2$, $bx$ এই রাশি তিনটির সাধারণ গুণনীয়ক $x$ ; $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a+2b)$, এই রাশি তিনটির সাধারণ গুণনীয়ক $(a+b)$.

4. **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক।** উচ্চতম মানের যে রাশিদ্বারা দুই বা তদধিক রাশি নিঃশেষে বিভাজ্য, সেই ভাজক রাশিকে ভাজ্য রাশিসমূহের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বলে। সুতরাং দুই বা তদধিক রাশির যতগুলি সাধারণ মৌলিক উৎপাদক হইতে পারে তাহাদের সকলের ধারাবাহিক গুণফলকে উক্ত রাশি দুইটির বা রাশিসমূহের **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** ( Highest Common Factor ) বলে।

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ককে সংক্ষেপে গ. সা. গু. ( H. C. F. ) বলে।

5. $a^3b^2c$, $a^2b^3c^2$, $ab^2c$ এই রাশি তিনটির সাধারণ গুণনীয়ক $a, b, c, b^2, ab, ab^2, ac, b^2c, abc, ab^2c$ ; কিন্তু রাশি তিনটির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক ( বা গ. সা. গু. ) হইল $ab^2c$.

$ab^2c$ প্রদত্ত রাশি তিনটির গ. সা. গু. বটে, কিন্তু $ab^2c$-এর সাংখ্যমান অন্যান্য সাধারণ উৎপাদকের সাংখ্যমানের তুলনায় বৃহত্তম নাও হইতে পারে। যথা, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$ হইলে, গ. সা. গু. $ab^2c$-এর সাংখ্যমান হয় $1.(\frac{1}{2})^2.\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$. লক্ষ্য করিয়া দেখ এই $\frac{1}{12}$ প্রদত্ত রাশি তিনটির অন্যান্য সাধারণ উৎপাদকের প্রত্যেকটির সাংখ্যমান অপেক্ষা বৃহত্তর নহে। পাটীগণিতের গ. সা. গু. ও বীজগণিতের গ. সা. গু.-র মধ্যে পার্থক্য এইখানে।

6. **একপদ রাশির গ. সা. গু নির্ণয়।**

কতিপয় একপদ রাশির ( Monomials ) গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ একপদ রাশিসমূহের সংখ্যাত্মক সহগের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। অতঃপর একপদ রাশিসমূহের সাধারণ প্রত্যেক অক্ষরের উর্ধ্বতম যে ঘাত দ্বারা প্রদত্ত প্রত্যেক রাশি বিভাজ্য তাহা নির্ণয় কর। সংখ্যাত্মক সহগের গ. সা. গু. ও আক্ষরিক অংশ সমূহের গ. সা. গু.-র গুণফল নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। বলা বাহুল্য, প্রত্যেক রাশির সংখ্যাত্মক সহগ 1 হইলে প্রদত্ত আক্ষরিক অংশসমূহের গ. সা. গু.-ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

উদা. 1. $a^2b^3c^4$, $a^3b^2c^3$ এবং $a^4b^2c$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এ স্থলে প্রত্যেক রাশির সংখ্যাত্মক সহগ 1. $a$-এর যে উর্ধ্বতম ঘাত দ্বারা তিনটি রাশিই বিভাজ্য তাহা $a^2$ ( লক্ষ্য কর $a^2$, $a^3$, $a^4$—ইহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম

সূচক বিশিষ্ট $a^2$-ই বৃহত্তম সাধারণ ) ; $b$-এর যে উর্ধ্বতম ঘাত দ্বারা তিনটি রাশিই বিভাজ্য তাহা $b^2$, ($b^3$, $b^2$, $b^2$—ইহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম সূচক বিশিষ্ট $b^2$-ই বৃহত্তম সাধারণ ), তদ্রূপ $c$-র যে উর্ধ্বতম ঘাত দ্বারা তিনটি রাশিই বিভাজ্য তাহা $c$.

সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 1.a^2b^2c = a^2b^2c$.

উদা. 2. $49a^7b^3cd$, $63a^3b^2c^2d^2$ এবং $35a^4b^4d^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$49 = 7\times7$, $63 = 3\times3\times7$, $35 = 5\times7$ $\therefore$ 49, 63, 35-এর গ. সা. গু. $= 7$ ;

$a^7$, $a^3$, $a^4$ ইহাদের মধ্যে $a^3$ বৃহত্তম সাধারণ ;

$b^3$, $b^2$, $b^4$ ইহাদের মধ্যে $b^2$ বৃহত্তম সাধারণ ;

$d$, $d^2$, $d^3$ ইহাদের মধ্যে $d$ বৃহত্তম সাধারণ ;

$c$ তৃতীয় রাশিতে নাই ;

সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 7a^3b^2d$.

উদা. 3. $105a^7b^3c^4$, $70a^5b^6c^7$ এবং $42a^3b^4c^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$105a^7b^3c^4 = 3\times5\times7\times a^7\times b^3\times c^4$$
$$70a^5b^6c^7 = 2\times5\times7\times a^5\times b^6\times c^7$$
$$42a^3b^4c^3 = 2\times3\times7\times a^3\times b^4\times c^3$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 7\times a^3\times b^4\times c^3$
$= 7a^3b^4c^3$.

## প্রশ্নমালা 54

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^4b^3, a^3b^4$
2. $a^7b^3c^2, a^5b^3c^5$
3. $x^2y^3z^4, xy^2z^5$
4. $6a^2, 9a^5$
5. $12a^3b^2c, 18a^2b^3c^2$
6. $27a^4x^2yz, 126b^3y^2z$
7. $46a^5b^4c^3, 115a^4b^3c^7$
8. $95x^2y^3z^5, 113x^4yz^2$
9. $10x^2y^3z^4, 15x^3y^2z^3, 35x^4y^4z^3$
10. $121abcxyz, 165bcxyz, 110acyz$
11. $85a^3b^4c^5x^3, 153a^4b^5c^6x^4y^3, 425a^2b^3x^5y^4$
12. $118p^4q^3r^7xy^2z^3, 177pq^3r^5x^5y^2z^3, 590p^3q^2r^4y^3z^4$

13. $130a^2b^3c^7d^8, 182a^4b^4c^4d^{10}, 286a^3b^5d^7$
14. $343a^5b^7c^8x^{10}y^5, 196a^4b^6c^9x^7y^6, 490a^6b^7c^8x^4y^3$
15. $132a^4b^6c^7x^8y^6, 288a^3b^5c^6y^7, 360a^2c^8x^5$
16. $18a^2b^3c^4x^4y^3z^2, 24a^3b^3c^3x^2y^4z^3, 30b^2c^8y^4z^3, 66a^3b^3x^4z^3$
17. $38a^7b^6c^5x^4y^3z^2, 95a^3b^4c^3x^2yz, 114b^3c^4y^3z^2, 380c^5x^2z^4$
18. $20a^2b^3c^4d^5x^7, 15a^2bc^3d^3xy^2, 55b^2d^4xz^5, 110bd^2x^2y^3,$
$45ab^2cxyz^2$

---

7. বহুপদ রাশির গ. সা. গু.। বহুপদ রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া পূর্বের নিয়ম অনুসারে উহাদের গ.সা.গু. নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 1. $a^3 - b^3$ ও $a^4 - b^4$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

দ্বিতীয় রাশি $= a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a - b$.

উদা. 2. $15x^2y - 135y^3$ এবং $10x^2 - 60xy + 90y^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 15x^2y - 135y^3$
$= 15y(x^2 - 9y^2)$
$= 3 \times 5.y(x+3y)(x-3y)$

দ্বিতীয় রাশি $= 10x^2 - 60xy + 90y^2$
$= 10(x^2 - 6xy + 9y^2)$
$= 2 \times 5(x-3y)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 5(x-3y)$.

উদা. 3. $3(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$ এবং $24x^3 - 24x^2 + 6x$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3\{(2x)^3 - 3(2x)^2.1 + 3.2x.(1)^2 - (1)^3\}$
$= 3(2x-1)^3$

দ্বিতীয় রাশি $= 6x(4x^2 - 4x + 1)$
$= 2 \times 3 \times x(2x-1)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 3(2x-1)^2$.

উদা. 4. $15a^2b^3(a^6-b^6)$, $45a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$

এবং $25a^3b^3(a^2+ab+b^2)^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3.5.a^2b^3(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$= 3.5.a^2b^3(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

দ্বিতীয় রাশি $= 3.3.5.a^2b^2\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$

$= 3.3.5a^2b^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

তৃতীয় রাশি $= 5.5a^3b^3(a^2+ab+b^2)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=5a^2b^2(a^2+ab+b^2)$.

উদা. 5. $a^2-b^2+2bc-c^2$ ও $c^2-a^2-2ab-b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$= (a)^2-(b-c)^2$

$= (a+b-c)(a-b+c)$

দ্বিতীয় রাশি $= c^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= (c)^2-(a+b)^2$

$= (c-a-b)(c+a+b)$

$= -(a+b-c)(a+b+c)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a+b-c$.

## প্রশ্নমালা 55

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $ab+b^2$, $a^2+ab$.
2. $x^3y^2+x^2y^3$, $x^3-xy^2$.
3. $x^2+2x$, $x^2+5x+6$.
4. $2x^2-4x$, $x^2-4x+4$.
5. $x^6-4x^4$, $x^4+4x^3+4x^2$.
6. $8x^3-1$, $4x^2-4x+1$.
7. $x^2+5x+6$, $x^2+7x+12$.
8. $b^2+c^2-a^2+2bc$, $b^2-c^2-a^2-2ca$.
9. $4x^3y^3(x^2-2xy+y^2)$, $10x^3y^3(x^2+xy-2y^2)$.
10. $6x^5y-6xy^5$, $10x^2y^2(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$.
11. $14a^2b(a^2-3a-4)$, $49ab^2(a^2-10a+24)$.
12. $x^4+x^3+x^2+x$, $x^4+2x^3+x^2$.
13. $x^2+5x+6$, $x^2+3x+2$, $x^2+4x+4$.

*14. $a^2-2a-15,\quad a^2-6a+5,\quad 35-2a-a^2.$

15. $x^2-4x-5,\ (x+1)(x^2-10x+25),\quad (x-5)(x^2+2x+1).$

16. $4-x^2,\quad x^2-4x+4,\quad x^2-5x+6.$

17. $9b^2-4a^2,\quad 2a^2-ab-3b^2,\quad 4a^2-12ab+9b^2.$

18. $a^2b(a^3-b^3),\quad a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4),\quad a^3b^2+a^2b^3+ab^4.$

19. $15(a+b)^2(c+d),\quad 25(a^2-b^2)(c+d)^2,\quad 35(ac+ad+bc+bd).$

20. $a^2b(a^4-b^4),\ ab^2(a^4+2a^2b^2+b^4),\ a^2b^2(2a^4+3a^2b^2+b^4).$

21. $x^3+5x^2y+6xy^2,\quad x^4-9x^2y^2,\quad x^5+7x^4y+12x^3y^2.$

22. $16x^4-2x,\quad 12x^4+2x^3-4x^2,\quad 18x^4-39x^3+15x^2.$

*23. $6x^3+5x^2y+xy^2,\quad 8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3,$
$4x^3-4x^2y-3xy^2.$

*24. $1+2x-8x^3-16x^4,\quad 1+4x+4x^3-16x^4.$

25. $x^4-y^4,\quad x^6-y^6,\quad x^8-y^8,\quad x^{12}-y^{12}.$ (B. U. 1935)

*26. $27x^4+x,\ 87x^2+8x-7,\ 27x^3+27x^2+9x+1.$ (B. U. 1916)

---

## লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

8. **গুণিতক।** একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তবে ভাজ্য রাশিকে ভাজক রাশির গুণিতক ( Multiple ) বলে। যথা—$xy$, $x$-এর গুণিতক, $y$-এরও গুণিতক; $x^2-y^2$, $(x+y)$-এর গুণিতক, $(x-y)$-এরও গুণিতক।

9. **সাধারণ গুণিতক।** কোন রাশিকে দুই বা ততোধিক রাশি দ্বারা পৃথক পৃথক ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে তবে ভাজ্য রাশিটিকে ভাজক রাশিসমূহের **সাধারণ গুণিতক** ( Common Multiple ) বলে। যথা, $6a^2b^3c$ রাশিটি, $ab, a^2b, bc, b^2c, a^2b^2, 6bc$ রাশিসমূহের প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং $6a^2b^3c$ রাশিটি, $ab, a^2b, bc, b^2c, a^2b^2, 6bc$ রাশিসমূহের প্রত্যেকটির সাধারণ গুণিতক।

10. **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক।** দুই বা ততোধিক রাশির সাধারণ গুণিতক-সমূহের মধ্যে যেটি লঘুতম মাত্রাবিশিষ্ট তাহাকে রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** ( Lowest Common Multiple ) বলে।

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতককে সংক্ষেপে ল. সা. গু. ( L. C. M. ) বলে।

**11.** $ab^2$, $bc^2$, $cd^2$ রাশি তিনটির একটি সাধারণ গুণিতক $ab^2c^2d^2$ ; কারণ $ab^2c^2d^2$ কে $ab^2$, $bc^2$, $cd^2$ দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিলে ভাগশেষ থাকে না। $a^2b^2c^2d^2$, $a^3b^3c^3d^3$ এবং এইরূপ আরও অনেক রাশিকেও $ab^2$, $bc^2$, $cd^2$ এর সাধারণ গুণিতক বলা যায়, কারণ উহাদিগকেও $ab^2$, $bc^2$, $cd^2$ দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিলে ভাগশেষ থাকে না। কিন্তু $ab^2c^2d^2$, $a^2b^2c^2d^2$, $a^3b^3c^3d^3$, প্রভৃতির মধ্যে ক্ষুদ্রতম মাত্রাবিশিষ্ট রাশি $ab^2c^2d^2$, সুতরাং $ab^2c^2d^2$-ই হইল $ab^2$, $bc^2$, $cd^2$ রাশি তিনটির লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু.।

পাটীগণিতে দুই বা তদধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করা হইলে, প্রাপ্ত ল. সা. গু.কে রাশিসমূহ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হয় ; বীজগণিতে ল. সা. গু. কে রাশিসমূহ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলির সাংখ্যমান অখণ্ড সংখ্যা নাও হইতে পারে। যথা, $ab$ ও $ac$-এর ল. সা. গু. হইবে $abc$. এখন $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$ হইলে $abc$ এর মান $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}$ কে $(1\times\frac{1}{2})$ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল হয় $\frac{1}{3}$ ; $\frac{1}{6}$ কে $(1\times\frac{1}{3})$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় $\frac{1}{2}$ ; এই ভাগফল $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ এর কোনটিই অখণ্ড রাশি নহে। পাটীগণিতের ল. সা. গু. ও বীজগণিতের ল. সা. গু.-র পার্থক্য এইখানে।

**12. একপদ রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়।** কতিপয় একপদ রাশির ( Monomials ) ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ একপদ রাশিসমূহের সংখ্যাত্মক সহগের ল. সা. গু. নির্ণয় কর। অতঃপর একপদ রাশিসমূহের মধ্যে বিভিন্ন অক্ষরসমূহের যে উর্ধ্বতম ঘাত আছে উহাদের গুণফল নির্ণয় কর ; এই গুণফল হইবে আক্ষরিক অংশ সমূহের ল. সা. গু.। সংখ্যাত্মক সহগগুলির ল. সা. গু. ও আক্ষরিক অংশের ল. সা. গু.-র গুণফল নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে। বলা বাহুল্য, প্রত্যেক রাশির সংখ্যাত্মক সহগ 1 হইলে, মাত্র আক্ষরিক অংশসমূহের ল. সা. গু.-ই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদা. 1. $a^2bc$, $ab^2c$ এবং $abc^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি তিনটি প্রত্যেকটির সংখ্যাত্মক সহগ 1.

প্রদত্ত রাশিসমূহে $a, b, c$ এই তিনটি অক্ষর আছে। উহাদের উধ্বর্তম ঘাত যথাক্রমে $a^2, b^2, c^2$.

সুতরাং নির্ণেয় ল. সা. গু. $= a^2b^2c^2$.

উদা. 2. $6x^2yz, 8x^3y^2$ এবং $12xz^3$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি তিনটির সংখ্যাত্মক সহগ 6, 8 ও 12 এর ল. সা. গু. = 24.

প্রদত্ত রাশি তিনটিতে $x, y, z$ এই তিনটি অক্ষর আছে এবং উহাদের উধ্বর্তম ঘাত যথাক্রমে $x^3, y^2, z^3$. $\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 24x^3y^2z^3$.

উদা. 3. $16ax^2y^3z^2$, $24bx^3y^3z^3$ এবং $40a^2b^2x^2z^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2\times2\times2\times2\times a\times x^2\times y^3\times z^2 = 2^4\times a\times x^2\times y^3\times z^2$.

দ্বিতীয় রাশি $= 2\times2\times2\times3\times b\times x^3\times y^3\times z^3 = 2^3\times3\times b\times x^3\times y^3\times z^3$.

তৃতীয় রাশি $= 2\times2\times2\times5\times a^2\times b^2\times x^2\times z^2 = 2^3\times5\times a^2\times b^2\times x^2\times z^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^4\times3\times5\times a^2\times b^2\times x^3\times y^3\times z^3$

$= 240a^2b^2x^3y^3z^3$.

উদা. 4. $5a^2b^3c^4, 6b^2c^3d, 7cd^2$ এবং $px^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5, 6, 7 এর ল. সা. গু. = 210

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 210a^2b^3c^4d^2px^2$.

## প্রশ্নমালা 56

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^4b, \ ab^4$
2. $a^2b^2c, \ b^2c^2d, \ acd$
3. $4x^2yz, \ 6xy^2z$
4. $2x^2y^3z, \ 6xy^2z^2$
5. $3a^5b^2c, \ 4a^2bc^4$
6. $8x^2y^3z^2, \ 10y^4z^3$
7. $14a^3b^4c^5, \ 21ab^3$
8. $25ab^2c^3x^4, \ 30a^3bcdy^3$
9. $36x^7y^8z^9, \ 8x^9y^7z^6, \ 24axy^2z^3$
10. $3x^3, \ 4xy^3z, \ 5x^4y^2z^2, \ xy^4z^2$
11. $13x^2y^3z^5, \ 39p^2y^4z^6, 6pxyz, \ ax^2y^3z^5$
12. $27a^7b^2c^3, \ 18a^7b^3c^4, \ 5ac^4d^7, \ 15b^2c^7a^5$

**13. বহুপদ রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়।** বহুপদ রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া পূর্বের নিয়ম অনুসারে উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়।

**উদা. 1.** $2(a-b)$, $3(a^2-b^2)$ এবং $4(a^3-b^3)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=2(a-b)$

দ্বিতীয় রাশি $=3(a+b)(a-b)$

তৃতীয় রাশি $=2^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=2^2\times3\times(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$

$=12(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=12(a+b)(a^3-b^3).$

**উদা. 2.** $x^2-(a-c)x-ac$ এবং $x^2-(a+c)x+ac$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=x^2-ax+cx-ac$

$=x(x-a)+c(x-a)$

$=(x-a)(x+c)$

দ্বিতীয় রাশি $=x^2-ax-cx+ac$

$=x(x-a)-c(x-a)$

$=(x-a)(x-c)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(x-a)(x+c)(x-c).$

**উদা. 3.** $3ab-6b^2$, $12a^3-48ab^2$ এবং $6a^3-6a^2b-12ab^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=3ab-6b^2=3b(a-2b)$

দ্বিতীয় রাশি $=12a^3-48ab^2$

$=12a(a^2-4b^2)$

$=3\times2^2\times a(a+2b)(a-2b).$

তৃতীয় রাশি $= 6a^3 - 6a^2b - 12ab^2$

$= 6a(a^2 - ab - 2b^2)$

$= 6a(a^2 - 2ab + ab - 2b^2)$

$= 6a\{a(a-2b) + b(a-2b)\}$

$= 3 \times 2 \times a(a-2b)(a+b)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 3 \times 2^2 \times a \times b(a+2b)(a-2b)(a+b)$

$= 12ab(a+2b)(a-2b)(a+b).$

উদা. 4. $27x^4 + x$, $87x^2 + 8x - 7$ এবং $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= x(27x^3 + 1)$

$= x\{(3x)^3 + (1)^3\}$

$= x(3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$

দ্বিতীয় রাশি $= 87x^2 + 29x - 21x - 7$

$= 29x(3x+1) - 7(3x+1)$

$= (3x+1)(29x-7)$

তৃতীয় রাশি $= (3x)^3 + 3.(3x)^2.1 + 3.3x.(1)^2 + (1)^3 = (3x+1)^3$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= x(3x+1)^3(29x-7)(9x^2-3x+1).$

উদা. 5. $3x^2 - 15x + 18$, $2x^2 + 2x - 24$, $4x^2 + 36x + 80$ এবং $6x^2 + 18x - 60$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3(x^2 - 5x + 6)$

$= 3(x^2 - 2x - 3x + 6)$

$= 3\{x(x-2) - 3(x-2)\}$

$= 3(x-2)(x-3)$

দ্বিতীয় রাশি $= 2(x^2 + x - 12)$

$= 2(x^2 + 4x - 3x - 12)$

$= 2\{x(x+4) - 3(x+4)\}$

$= 2(x+4)(x-3)$

তৃতীয় রাশি $= 4(x^2 + 9x + 20)$

$= 4(x^2 + 4x + 5x + 20)$

$= 4\{x(x+4) + 5(x+4)\}$

$= 2^2(x+4)(x+5)$

চতুর্থ রাশি $= 6(x^2 + 3x - 10)$

$= 6(x^2 + 5x - 2x - 10)$

$= 6\{x(x+5) - 2(x+5)\}$

$= 2 \times 3(x+5)(x-2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 3 \times 2^2(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

$= 12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5).$

## প্রশ্নমালা 57

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^3+a^2b,\ a^3b^2+a^2b^3$
2. $x^2+xy,\ xy+y^2$
3. $4x^2y+8xy^2,\ 6x^3y^2+12x^2y^3$
4. $a^2+2ab+b^2,\ a^2+3ab+2b^2$
5. $a^3-2a^2,\ 2a^3-8a$
6. $25a^2-9b^2,\ 5a^2+8ab+3b^2$
7. $x^2(x^2-4),\ x^4+2x^3-8x^2$ (W. B. S. B. 1952)
8. $x^2-x-6,\ x^2+x-12,\ x^2+6x+8$
9. $x^2-9,\ x^2+6x+9,\ x^2+x-2$
10. $x^2-9y^2,\ x^2-xy-6y^2,\ x^2+xy-12y^2$
11. $2x^2-x-1,\ x^2-1,\ 2x^2+3x+1$
12. $a^2-b^2, a^3-b^3,\ a^4-b^4$
13. $x^2+x-6,\ x^2-3x+2,\ x^2+2x-3$
14. $6x^2+11x-21,\ 2x^3+x^2-15x,\ 4x^2+14x+6$
15. $x^2-x-6,\ x^2+x-12,\ x^2+6x+8$
16. $a^3+a^2b+ab^2+b^3,\ a^3-a^2b+ab^2-b^3$
17. $x^2-3x+2,\ x^2-4x+3,\ x^2-5x+6$
18. $2x^2-3x-2,\ x^2-5x+6,\ 2x^2-5x-3$
19. $x^6-2x^4y^2+x^2y^4-y^6,\ x^6-x^2y^4-2xy^5-y^6$ (M. U. 1904)
20. $8a^3-27b^3,\ 3a^2-ab-2b^2,\ 6a^2-5ab-6b^2$ (B. U. 1911)
21. $15(x^3+y^3),\ 5(x^2-xy+y^2),\ 4(x^2+xy+y^2),\ 6(x^2-y^2)$
22. $1-x+x^2,\ 1+x+x^2,\ 1+x^2+x^4$
23. $x^3+a^3,\ x^3-a^3,\ x^4+a^2x^2+a^4,\ x^2-ax+a^2$ (M. U. 1896)
24. $a^5-ab^4,\ b^3-a^3,\ a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)$
25. $9x^4-28x^2+3,\ 27x^4-12x^2+1,\ 27x^4+6x^2-1,\ x^4-6x^2+9$ (C. U. 1886)
26. $x^3-3x^2+3x-1,\ x^3-x^2-x+1,\ x^4-2x^3+2x-1$ (B. U. 1890)
27. $4x^2-6yz-(9y^2+z^2),\ 9y^2+4xz-(4x^2+z^2),$ $z^2-12xy-(4x^2+9y^2)$

# চতুর্দশ অধ্যায়

## ভগ্নাংশ

**1. ভগ্নাংশ।** পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও একটি রাশিকে অপর একটি রাশি দ্বারা ভাগ করিয়া সম্পূর্ণ ভাগফল প্রকাশ করিতে হইলে একটি কসি টানিয়া ভাজ্য রাশিকে ঐ কসির উপরে এবং ভাজক রাশিকে কসির নীচে রাখিতে হয়। সম্পূর্ণ ভাগফলটি এই আকারে লিখিত হইলেই উহাকে **ভগ্নাংশ** ( Fraction ) আকারে প্রকাশিত বলা হয়। কসির উপরের রাশিকে অর্থাৎ ভাজ্য রাশিকে **লব** ( Numerator ) এবং কসির নীচের রাশিকে অর্থাৎ ভাজক রাশিকে **হর** ( Denominator ) বলে। যে কোন $a$ রাশিকে অপর একটি $b$ রাশি দ্বারা ভাগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফল $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ। $a$ এই ভগ্নাংশের লব এবং $b$ উহার হর।

$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{a}{3c}$, $\frac{-a^2}{5}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{x^3+y^3}{a-b}$ ইহাদের প্রত্যেকটিই এক একটি ভগ্নাংশ।

**2.** ভগ্নাংশ একটি **ভাগফল** বলিয়া ভগ্নাংশের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্ন ভাগ প্রক্রিয়ার চিহ্নের নিয়ম অনুসারে নির্ণীত হয়।

যথা : $a \div b = \frac{a}{b}$; $\qquad a \div -b = -\frac{a}{b}$;

$-a \div b = -\frac{a}{b}$; $\qquad -a \div -b = \frac{a}{b}$;

$\frac{+x}{+y} = \frac{x}{y}$; $\qquad \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$;

$\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$; $\qquad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$.

3. কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

মনে কর $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ এবং $p$ যে কোন একটি রাশি।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) $\frac{a}{b}=\frac{ap}{bp}$ এবং (ii) $\frac{a}{b}=\frac{a\div p}{b\div p}$

প্রমাণ। (i) $\frac{a}{b}=a\div b$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে,

$=(a\div b)\times p\div p$

$=a\div b\times p\div p$

$=a\times p\div b\div p$, বিনিময় বিধি অনুসারে,

$=(a\times p)\div(b\times p)$, সংযোগ বিধি অনুসারে,

$=\frac{a\times p}{b\times p}$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে,

$=\frac{ap}{bp}$.

(ii) $\frac{a}{b}=a\div b$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে,

$=(a\div b)\times p\div p$

$=a\div b\times p\div p$

$=a\div p\div b\times p$, বিনিময় বিধি অনুসারে,

$=(a\div p)\div(b\div p)$, সংযোগ বিধি অনুসারে,

$=\frac{a\div p}{b\div p}$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে।

4. কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ের চিহ্ন পরিবর্তন করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

মনে কর $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ। প্রমাণ করিতে হইবে, $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$

লব ও হর উভয়কে $-1$ দ্বারা গুণ করিলে, $\frac{a}{b}=\frac{a\times(-1)}{b\times(-1)}=\frac{-a}{-b}$

5. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিলে ভগ্নাংশটির চিহ্ন পরিবর্তন হয়। যথা :—

(i) $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$

6. নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে চিহ্নের পরিবর্তনে আকারের কিরূপ পরিবর্তন ঘটে লক্ষ্য কর :

(i) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{-(b-a)}{-(c-b)}=\frac{-b+a}{-c+b}=\frac{a-b}{b-c}.$

(ii) $-\frac{y-x}{z}=\frac{-(y-x)}{z}=\frac{-y+x}{z}=\frac{x-y}{z}.$

(iii) $\frac{x-y}{-(y-z)}=-\frac{x-y}{(y-z)}=\frac{-(x-y)}{y-z}.$

(iv) $\frac{b-c}{a-c}=\frac{b-c}{-(c-a)}=\frac{-(b-c)}{c-a}=-\frac{b-c}{c-a}.$

(v) $\frac{1}{a-b-c}=\frac{1}{-(b+c-a)}=-\frac{1}{b+c-a}.$

7. **ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকার।** পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে উহাদের সাধারণ কোন গুণনীয়ক দ্বারা ভাগ করা হইলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না—অথচ উহার আকার পূর্বাপেক্ষা লঘু হইবে। সুতরাং লব ও হর উভয়কে উহাদের সমস্ত সাধারণ গুণনীয়ক দ্বারা অর্থাৎ লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটি উহার লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হইবে।

উদা. 1. $\frac{18a^3b^4c^2}{8a^2bc^3}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

**প্রথম প্রণালী।** $18a^3b^4c^2$ এবং $8a^2bc^3$ এর গ. সা. গু. $=2a^2bc^2$

$\therefore \frac{18a^3b^4c^2}{8a^2bc^3}=\frac{18a^3b^4c^2\div 2a^2bc^2}{8a^2bc^3\div 2a^2bc^2}=\frac{9ab^3}{4c}.$

লব ও হর উভয়কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া এবং উহাদের সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ করিয়াও ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করা যায়।

দ্বিতীয় প্রণালী। $\frac{18a^3b^4c^2}{8a^2bc^3} = \frac{2.3.3.a.a.a.b.b.b.b.c.c.}{2.2.2.a.a.b.c.c.c.} = \frac{3.3.a.b.b.b.}{2.2.c}$

$$= \frac{9ab^3}{4c}.$$

তৃতীয় প্রণালী। $\frac{\overset{9}{\cancel{18}}a^3b^4c^2}{\underset{4}{\cancel{8}}a^2bc^3} = \frac{9ab^3}{4c}.$

$$\left[\because \quad \frac{18}{8} = \frac{9}{4}; \; \frac{a^3}{a^2} = a \; ; \; \frac{b^4}{b} = b^3 \; ; \; \frac{c^2}{c^3} = \frac{1}{c}\right]$$

উদা. 2. $\frac{108a^7b^2c^3d^4}{-84a^3b^3cx}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\frac{108a^7b^2c^3d^4}{-84a^3b^3cx} = \frac{9 \times 12 \times a^3 \times a^4 \times b^2 \times c \times c^2 \times d^4}{-7 \times 12 \times a^3 \times b^2 \times b \times c \times x}$$

$$= \frac{9a^4c^2d^4}{-7bx}$$

$$= -\frac{9a^4c^2d^4}{7bx}$$

উদা. 3. $\frac{30a^4b + 45a^3b^2 + 15a^2b^3}{100a^3b^2 - 25ab^4}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\frac{30a^4b + 45a^3b^2 + 15a^2b^3}{100a^3b^2 - 25ab^4} = \frac{15a^2b(2a^2 + 3ab + b^2)}{25ab^2(4a^2 - b^2)}$$

$$= \frac{15a^2b(2a^2 + 2ab + ab + b^2)}{25ab^2\{(2a)^2 - (b)^2\}}$$

$$= \frac{15a^2b\{2a(a+b) + b(a+b)\}}{25ab^2(2a+b)(2a-b)}$$

$$= \frac{3 \times 5a^2b(a+b)(2a+b)}{5 \times 5ab^2(2a+b)(2a-b)}$$

$$= \frac{3a(a+b)}{5b(2a-b)}.$$

উদা. 4. $\dfrac{6a(a^3+2a^2b+ab^2)(a^2+4ab+3b^2)}{12a^2(a+b)^3(a^2+5ab+6b^2)}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{6a.a(a^2+2ab+b^2)(a^2+ab+3ab+3b^2)}{12a^2(a+b)^3(a^2+2ab+3ab+6b^2)}$$
$$= \frac{6a^2(a+b)^2\{a(a+b)+3b(a+b)\}}{12a^2(a+b)^3\{a(a+2b)+3b(a+2b)\}}$$
$$= \frac{6a^2(a+b)^2(a+b)(a+3b)}{12a^2(a+b)^3(a+2b)(a+3b)}$$
$$= \frac{6a^2(a+b)^3(a+3b)}{2\times 6a^2(a+b)^3(a+2b)(a+3b)}$$
$$= \frac{1}{2(a+2b)}.$$

উদা. 5. $\dfrac{8x^3+12x^2+6x+1}{8x^3+8x^2+2x}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(2x)^3+3.(2x)^2.1+3.2x.(1)^2+(1)^3}{2x(4x^2+4x+1)} = \frac{(2x+1)^3}{2x(2x+1)^2}$$
$$= \frac{2x+1}{2x}.$$

## প্রশ্নমালা 58

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

1. $\dfrac{10x^2yz}{15xy^2z}$
2. $\dfrac{18a^7b^4c^5d}{24a^8b^5c^5d^2}$
3. $\dfrac{8p^2q^3r^7}{12p^3q^2r^3}$
4. $\dfrac{36a^5b^3c^4d^2}{60a^2b^2c^4d^3}$
5. $\dfrac{15a^7b^3c^4d^5}{20a^3b^2c^3d^5}$
6. $\dfrac{27a^3b^3c^2d^2x}{45ab^3d^2x^2}$
7. $\dfrac{21x^2y^3z^4}{-28x^2y^2z^4}$
8. $\dfrac{-108x^3y^3z^3}{27x^4y^2z^4}$
9. $\dfrac{-45x^4y^3z^2}{-50xy^2z^3}$
10. $\dfrac{68ab^2c^3xy^2}{85a^3b^2cx^2y}$
11. $\dfrac{-48xy^3z^2}{64axy^2z^3}$
12. $\dfrac{22p^2x^3y^2z^4}{-77p^3x^2y^3z^5}$
13. $\dfrac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2}$
14. $\dfrac{a^3b+a^2b^2-2ab^3}{a^4b^2-a^2b^4}$
15. $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-9x+18}$
16. $\dfrac{x^3+x^2+x}{x^3-1}$
17. $\dfrac{x^2-10x-24}{x^2+14x+24}$
18. $\dfrac{4x^4+81}{6x^3-18x^2+27x}$

19. $\dfrac{4x^4-4x^3+x^2}{8x^3-12x^2+6x-1}$

20. $\dfrac{x^6-1}{(x+1)(x^4+x^2+1)}$

21. $\dfrac{27x^4+125x}{x^2(15x^2+34x+15)}$

22. $\dfrac{6x^2+x-1}{9x^2-6x+1}$

23. $\dfrac{6x^2-7x-3}{2x^2-x-3}$

24. $\dfrac{1-x-6x^2}{2+x-6x^2}$

25. $\dfrac{6x^2+13x-5}{8x^2+18x-5}$

26. $\dfrac{6x^2-7x-5}{9x^2-12x-5}$

27. $\dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+15x+7}$

28. $\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+2x^2+x^4}$

29. $\dfrac{27x^3-1}{12x^2-13x+3}$

30. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$

31. $\dfrac{27-x^3}{x^3-15x+36}$

32. $\dfrac{27x^3+27x^2+9x+1}{81x^4-1}$

33. $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2+2bc}$

34. $\dfrac{(a-b)^2-(c-d)^2}{(a+d)^2-(b+c)^2}$

35. $\dfrac{4x^4-37x^2y^2+9y^4}{(2x+y)^2(2x-y)(x+3y)}$

36. $\dfrac{(6x^2+11x+3)(2x^2+3x+1)}{(6x^2+5x+1)(2x^2-5x+3)}$

37. $\dfrac{(8x^3-y^3)(16x^2-9y^2)}{(8x^2+2xy-3y^2)(4x^2+xy-3y^2)}$

38. $\dfrac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)}$

---

**৪. দুই বা তদধিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন।**

দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে পাটীগণিতের ন্যায় ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হয়। ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করাই সুবিধাজনক। বিভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইলে, যে যে ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা সম্ভব, প্রথমতঃ উহাকে বা উহাদিগকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর। অতঃপর

হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া এই ল. সা. গু. কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা যথাক্রমে ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফল দিয়া প্রত্যেক ভগ্নাংশের লব ও হরকে যথাক্রমে গুণ কর। এখন যে যে উত্তর হইল উহারাই প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ হইল।

**উদা. 1.** $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ এবং $\frac{c}{d}$ এই ভগ্নাংশ তিনটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

হরগুলির ল. সা. গু. $= bcd$.

$bcd$ কে $b$, $c$ এবং $d$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় যথাক্রমে $cd$, $bd$ এবং $bc$.

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{a \times cd}{b \times cd} = \frac{acd}{bcd},$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b \times bd}{c \times bd} = \frac{b^2 d}{bcd},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times bc}{d \times bc} = \frac{bc^2}{bcd}.$$

**উদা. 2.** $\frac{x+y}{x-y}, \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$ ও $\frac{3xy}{x^2-y^2}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

তৃতীয় ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে হয় $(x+y)(x-y)$।

$x-y$, $(x+y)^2$, এবং $x^2-y^2$ এর ল. সা. গু. $= (x+y)^2(x-y)$।

$(x+y)^2(x-y)$ কে $(x-y)$ দ্বারা, $(x+y)^2$ দ্বারা এবং $(x+y)(x-y)$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল হয় যথাক্রমে $(x+y)^2$, $(x-y)$ এবং $(x+y)$.

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x+y)(x+y)^2}{(x-y)(x+y)^2} = \frac{(x+y)^3}{(x-y)(x+y)^2}$$

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)^2(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{(x-y)^3}{(x-y)(x+y)^2}$$

$$\frac{3xy}{x^2-y^2} = \frac{3xy(x+y)}{(x+y)(x-y)(x+y)} = \frac{3xy(x+y)}{(x-y)(x+y)^2}$$

উদা. 3. $\frac{20(x^2-y^2)}{25(x^2+2xy+y^2)}, \frac{12x^3y(x^4+x^2y^2+y^4)}{20xy^2(x^3+y^3)}, \frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^3}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিলে,

প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{20(x+y)(x-y)}{25(x+y)^2}=\frac{4(x-y)}{5(x+y)}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{12x^3y(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{20xy^2(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{3x(x^2+xy+y^2)}{5y(x+y)}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(x-y)^2}{(x-y)^3}=\frac{1}{(x-y)}$.

$5(x+y)$, $5y(x+y)$, $(x-y)$ এর ল. সা. গু. $=5y(x+y)(x-y)$.

$5y(x+y)(x-y)$ কে $5(x+y)$, $5y(x+y)$ এবং $(x-y)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় যথাক্রমে $y(x-y)$, $(x-y)$ এবং $5y(x+y)$.

$\therefore$ প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{4(x-y).y(x-y)}{5(x+y).y(x-y)}=\frac{4y(x-y)^2}{5y(x^2-y^2)}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{3x(x^2+xy+y^2).(x-y)}{5y(x+y)(x-y)}=\frac{3x(x^3-y^3)}{5y(x^2-y^2)}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{1.5y(x+y)}{(x-y).5y(x+y)}=\frac{5y(x+y)}{5y(x^2-y^2)}$.

উদা. 4. $\frac{a}{b^2-c^2}, \frac{b}{c^2-b^2}, \frac{c-a}{b+c}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

প্রথম হর $=(b+c)(b-c)$ ; দ্বিতীয় হর $=-(b^2-c^2)=-(b+c)(b-c)$ ;

$(b+c)(b-c)$, $-(b+c)(b-c)$, $(b+c)$ এর ল. সা. গু. $=(b+c)(b-c)$.

$(b+c)(b-c)$ কে $(b+c)(b-c)$ দ্বারা, $-(b+c)(b-c)$ দ্বারা এবং $(b+c)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হইল যথাক্রমে $1$, $-1$ এবং $b-c$.

$\therefore$ প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{a.1}{(b+c)(b-c).1}=\frac{a}{b^2-c^2}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{b}{-(b+c)(b-c)}=\frac{b(-1)}{-(b+c)(b-c)(-1)}=\frac{-b}{b^2-c^2}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{c-a}{b+c}=\frac{(c-a)(b-c)}{(b+c)(b-c)}=\frac{(c-a)(b-c)}{b^2-c^2}$.

## প্রশ্নমালা 59

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর :

1. $\frac{x^2}{y^2}, \frac{5x}{3y}, \frac{2y}{5x}$

2. $\frac{a^2}{bc}, \frac{b^2}{ca}, \frac{c^2}{ab}$

3. $\frac{a}{2xy}, \frac{b}{3yz}, \frac{c}{4zx}$

4. $\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}$

5. $\frac{a}{x^2y^2}, \frac{3b}{x^2}, \frac{4c}{xy}, \frac{5d}{y^2}$

6. $\frac{a}{b+c}, \frac{cd}{a+b}, \frac{b}{c+a}$

7. $\frac{a}{bc(b-c)}, \frac{b}{ca(c-a)}, \frac{c}{ab(a-b)}$

8. $\frac{x}{a-b}, \frac{y}{b-a}$

9. $\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{b^3-a^2b}$

10. $\frac{x}{b^2-c^2}, \frac{y}{(b+c)^2}, \frac{z}{(b-c)^2}$

11. $\frac{bc}{a(b-c)}, \frac{ca}{b(c-a)}, \frac{ab}{c(a-b)}$

12. $\frac{a^2(b-c)}{(c-a)(a-b)}, \frac{b^2(c-a)}{(a-b)(b-c)}, \frac{c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)}$

13. $\frac{ab}{a-b}, \frac{a}{a^2+ab+b^2}, \frac{b}{a^3-b^3}$

14. $\frac{1}{x^2-2x-3}, \frac{2x}{x^2+x-12}, \frac{3x^2}{x^2+5x+4}$

15. $\frac{x+1}{x^2-3x+2}, \frac{x-3}{x^2-5x-14}, \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

16. $\frac{1}{x^4+x^2+1}, \frac{2x}{x^2+x+1}, \frac{3x^2}{x-1-x^2}$

17. $\frac{bc}{bc+a(b+c+a)}, \frac{ca}{ca+b(c+a+b)}, \frac{ab}{ab+c(a+b+c)}$

18. $\frac{a^2bc(b-c)}{b^3-c^3}, \frac{b^2ca(c^2-b^2)}{b^2+bc+c^2}, \frac{c^2ab(a+b+c)}{b^4+b^2c^2+c^4}$

---

### 9. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ।

দ্বিতীয় অধ্যায়ে দেখান হইয়াছে যে, $\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots$

আবার বিপরীতক্রমে, $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots\cdots = \frac{a+b+c+\cdots}{x}$

সুতরাং দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া, পরিবর্তিত এই ভগ্নাংশগুলির লবসমূহের সমষ্টি বা অন্তরকে লব এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ হরকে হর করিলেই নির্ণেয় উত্তর পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $\frac{x}{a}$ ও $\frac{a}{x}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

ভগ্নাংশ দুইটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিলে হইবে $\frac{x^2}{ax}$ ও $\frac{a^2}{ax}$.

সুতরাং $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x^2}{ax}+\frac{a^2}{ax}=\frac{x^2+a^2}{ax}$.

উদা. 2. $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$ হইতে $\frac{2}{(x+2)(x+4)}$ বিয়োগ কর।

ভগ্নাংশ দুইটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিলে হইবে $\frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+4)}$ এবং $\frac{2(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+4)}$

$$\therefore \frac{3}{(x+1)(x+4)}-\frac{2}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+4)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+4)} \quad \cdots(A)^*$$
$$=\frac{3(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{3x+6-2x-2}{(x+1)(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

*দ্রষ্টব্য। (1) উপরের উদাহরণে '$A$' চিহ্নিত পংক্তি বাদ দিয়া একেবারে পরবর্তী পংক্তি ধরিয়া কাজ করিয়া যাওয়াই সুবিধাজনক। যোগ বিয়োগের অঙ্কে কার্যতঃ ঐরূপ অংশ বাদ দেওয়া হইয়া থাকে।

(2) চতুর্থ অধ্যায়ে দেখানো হইয়াছে যে একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিতে হইলে দ্বিতীয় রাশির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া প্রথম রাশির সহিত যোগ করিতে হয়।

উদা. 3. $\frac{2x+3y}{2x-3y}$ হইতে $-\frac{2x-3y}{2x+3y}$ বিয়োগ কর।

$$\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}\right)-\left(-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right)$$

$$=\frac{2x+3y}{2x-3y}+\frac{2x-3y}{2x+3y}$$

$$=\frac{(2x+3y)^2+(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$=\frac{2\{(2x)^2+(3y)^2\}}{(2x)^2-(3y)^2} \qquad [\because \ (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)]$$

$$=\frac{2(4x^2+9y^2)}{4x^2-9y^2}$$

$$=\frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}+\frac{48ab}{16b^2-9a^2}$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}+\frac{48ab}{-(9a^2-16b^2)}$

$$=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}-\frac{48ab}{9a^2-16b^2}$$

$$=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}-\frac{48ab}{(3a+4b)(3a-4b)}$$

$$=\frac{(3a+4b)^2-(3a-4b)^2-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)}$$

$$=\frac{4.3a.4b-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)} \qquad [\because \ (x+y)^2-(x-y)^2=4xy]$$

$$=\frac{48ab-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)}$$

$$=\frac{0}{(3a-4b)(3a+4b)}=0.$$

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}+\dfrac{a+b}{(a-b)^2}-\dfrac{2a+b}{a^2-b^2}$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a-b}{(a+b)^2}+\dfrac{a+b}{(a-b)^2}-\dfrac{2a+b}{(a+b)(a-b)}$

$$=\frac{(a-b)^3+(a+b)^3-(2a+b)(a+b)(a-b)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(2a+b)(a^2-b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{2a^3+6ab^2-2a^3-a^2b+2ab^2+b^3}{\{(a+b)(a-b)\}^2}=\frac{8ab^2-a^2b+b^3}{(a^2-b^2)^2}.$$

**10.** কখনও কখনও দেখা যায় ভগ্নাংশ সমূহের সমস্ত হরের ল. সা. গু. করিয়া সাধারণভাবে একই সঙ্গে প্রক্রিয়া করিতে বিশেষ সুবিধা হয় না ; কিন্তু ভগ্নাংশগুলিকে সুবিধাজনকভাবে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া যোগ বিয়োগ করিলে সহজে উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 6. সরল কর : $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{2a}{a^2+4b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+16b^4}$

$$\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}=\frac{a+2b+a-2b}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{2a}{a^2-4b^2};$$

$$\frac{2a}{a^2-4b^2}+\frac{2a}{a^2+4b^2}=\frac{2a^3+8ab^2+2a^3-8ab^2}{(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)}=\frac{4a^3}{a^4-16b^4};$$

$$\frac{4a^3}{a^4-16b^4}+\frac{4a^3}{a^4+16b^4}=\frac{4a^7+64a^3b^4+4a^7-64a^3b^4}{(a^4-16b^4)(a^4+16b^4)}$$

$$=\frac{8a^7}{a^8-256b^8}.$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের কোনটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা সম্ভব হইলে যোগবিয়োগ প্রক্রিয়া আরম্ভ করিবার পূর্বে উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

উদা. 7. সরল কর :

$$\frac{ax-ay-bx+by}{x^2-y^2}+\frac{bx-cx}{x^2+xy}+\frac{cx-ax+cy-ay}{(x+y)^2}$$

প্রথম ভগ্নাংশ $=\dfrac{a(x-y)-b(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{(x-y)(a-b)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{a-b}{x+y}.$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{x(b-c)}{x(x+y)}=\frac{b-c}{x+y}$.

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{x(c-a)+y(c-a)}{(x+y)^2}=\frac{(c-a)(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{c-a}{x+y}$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{a-b}{x+y}+\frac{b-c}{x+y}+\frac{c-a}{x+y}=\frac{a-b+b-c+c-a}{x+y}=\frac{0}{x+y}=0$

**উদা. 8.** সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{a^2}{(a^2-b^2)\{-(c^2-a^2)\}}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)\{-(a^2-b^2)\}}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)\{-(b^2-c^2)\}}$$

$$=\frac{a^2}{-(a^2-b^2)(c^2-a^2)}+\frac{b^2}{-(b^2-c^2)(a^2-b^2)}+\frac{c^2}{-(c^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{0}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}=0.$$

## প্রশ্নমালা 60

যোগফল নির্ণয় কর :

1. $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}$.

2. $\frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy}$.

3. $\frac{a^2}{bc}, \frac{b^2}{ca}, \frac{c^2}{ab}$.

4. $\frac{2}{x+3}, \frac{2}{x-3}$.

5. $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{2a+b}, \frac{5}{b-a}$.

6. $\frac{a}{a+b}, \frac{b^2+ab}{(a+b)^2}$.

7. $\frac{a}{bc}$ হইতে $\frac{b}{ca}$ বিয়োগ কর।

8. $\frac{2x+3}{4}$ হইতে $\frac{x-1}{2}$ বিয়োগ কর।

9. $\dfrac{x+y}{2(x-y)}$ হইতে $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ বিয়োগ কর।

10. $\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$ হইতে $-\dfrac{1}{1-x}$ বিয়োগ কর।

সরল কর :

11. $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}-\dfrac{c^2}{ab}$.

12. $\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ca}+\dfrac{a-b}{ab}$.

13. $\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{a+b+c}+\dfrac{c+a}{a+b+c}$.

14. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$.

15. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$.

16. $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}$.

17. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$.

18. $\dfrac{1}{x^2-8x+15}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-6x+5}$.

19. $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{2}{x^2+3x+2}$.

20. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{5x-x^2-6}$.

21. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

22. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$,

23. $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$.

24. $\dfrac{x+y}{y}-\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^3-x^2y}{x^2y-y^3}$.

25. $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\dfrac{(x-b)^2}{b(a-b)}$.

26. $\dfrac{x+27}{x+6x^2-15}-\dfrac{2x+3}{4x^2+3-8x}+\dfrac{x+19}{5-7x-6x^2}$.

27. $\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}$.

28. $\dfrac{a-2x}{a+2x}-\dfrac{a+2x}{a-2x}+\dfrac{8ax}{a^2+4x^2}$.

29. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}$.

30. $\dfrac{1}{4a^3(a+x)}+\dfrac{1}{4a^3(a-x)}+\dfrac{1}{2a^2(a^2+x^2)}$.

31. $\dfrac{1+a}{1-a}+\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{4a}{1+a^2}+\dfrac{8a}{1-a^4}$.

32. $\dfrac{1}{x^2+2xy-3y^2}+\dfrac{1}{y^2+2xy-3x^2}-\dfrac{2}{3x^2+3y^2+10xy}$

33. $\dfrac{a-1}{a-2}-\dfrac{a+1}{a+2}-\dfrac{4}{4-a^2}+\dfrac{2}{2-a}$.

34. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(c+a)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

35. $\dfrac{(a-c)^2-b^2}{a^2-(b+c)^2}+\dfrac{(b-a)^2-c^2}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{(c-b)^2-a^2}{c^2-(a+b)^2}$.

36. $\dfrac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$.

37. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

38. $\dfrac{9x^2-(y-z)^2}{(3x+z)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(z-3x)^2}{(3x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(3x-y)^2}{(y+z)^2-9x^2}$.

39. $\dfrac{a^2+ac}{a^2c-c^3}+\dfrac{c-a}{c(c+a)}+\dfrac{2c}{c^2-a^2}$.

40. $\dfrac{3}{8(1-x)}+\dfrac{1}{8(1+x)}-\dfrac{1-x}{4(1+x^2)}$.

41. $\dfrac{(2a-3b)^2-a^2}{4a^2-(3b+a)^2}+\dfrac{4a^2-(3b-a)^2}{9(a^2-b^2)}+\dfrac{9b^2-a^2}{(2a+3b)^2-a^2}$

42. $\dfrac{1}{2(1-a)^2}+\dfrac{1}{2(1-a)}+\dfrac{1}{2(1+a)}+\dfrac{1}{2(1+a)^2}$.

43. $\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{x+2y}+\frac{2x}{x^2+4y^2}+\frac{4x^3}{x^4+16y^4}$.

44. $\frac{ax}{(a-b)(a-c)}+\frac{bx}{(b-c)(b-a)}+\frac{cx}{(c-a)(c-b)}$.

*45. $\frac{1}{abx}+\frac{1}{a(a-b)(x-a)}+\frac{1}{b(b-a)(x-b)}$.

*46. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{8x^7}{x^8+1}$.

*47. $\frac{x^6}{x^2-1}-\frac{x^4}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$.

---

**11. ভগ্নাংশের গুণন।** দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের গুণফল ভগ্নাংশগুলির লবগুলির গুণফলকে লব, এবং হরগুলির গুণফলকে হর রূপে প্রকাশ করিলে যে ভগ্নাংশ হয় উহার সমান।

ধর $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ দুইটি ভগ্নাংশ। ইহাদের গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে।

গুণফল $=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$

$=(a\div b)\times(c\div d)$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে,

$=a\div b\times c\div d$, সংযোগ বিধি অনুসারে,

$=a\times c\div b\div d$, বিনিময় বিধি অনুসারে,

$=(a\times c)\div(b\times d)$, সংযোগ বিধি অনুসারে,

$=(ac)\div(bd)$

$=\frac{ac}{bd}$, ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে।

তদ্রূপ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$ ; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}$ ; ইত্যাদি।

ভগ্নাংশকে পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা বা পূর্ণ সংখ্যাকে ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করিতে হইলেও একই নিয়ম খাটিবে। এস্থলে স্মরণ রাখিতে হইবে যে কোন পূর্ণ সংখ্যার নীচে 1 হর রূপে রাখিলে পূর্ণ সংখ্যাকে ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা হয়। অতঃপর পূর্বের

নিয়ম অনুসারে গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে। প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া উপরে নীচে কাটাকাটি করিয়া লঘিষ্ঠ আকারে উত্তর নির্ণয় করিতে হয়।

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{a\times c}{b\times 1}=\frac{ac}{b}.$$

উদা. 1. $\frac{x^2y}{z}$, $\frac{y^2z}{x}$, $\frac{z^2x}{y}$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$\frac{x^2y}{z}\times\frac{y^2z}{x}\times\frac{z^2x}{y}=\frac{x^2y\times y^2z\times z^2x}{z\times x\times y}=\frac{x^2.x\times y.y^2\times z.z^2}{z\times x\times y}$$

$$=\frac{x^3\times y^3\times z^3}{x\times y\times z}=x^2y^2z^2.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^2-1}\times\frac{3}{2a-2}\times\frac{a^2+a}{a-1}.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{(a-1)^3}{(a+1)(a-1)}\times\frac{3}{2(a-1)}\times\frac{a(a+1)}{(a-1)}=\frac{3a}{2}.$

*উদা. 3. সরল কর : $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right).$

প্রদত্ত রাশি =

$$\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x+y}{x-y}+\frac{(x-y)(x^3+y^3)}{(x+y)(x^3-y^3)}-\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\times\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$$

$$=1+\frac{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)}-1$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{(x^2-xy+y^2)^2-(x^2+xy+y^2)^2}{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$$

$$=\frac{(x^2-xy+y^2+x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2-x^2-xy-y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)(-2xy)}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

দ্বিতীয় প্রণালী ঃ $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)$

$$=\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)-x^3+y^3}{x^3+y^3}\times\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)+x^3+y^3}{x^3-y^3}$$

$$=\frac{x^3-x^2y+xy^2-x^2y+xy^2-y^3-x^3+y^3}{x^3+y^3}$$

$$\times\frac{x^3+x^2y+xy^2+x^2y+xy^2+y^3+x^3+y^3}{x^3-y^3}$$

$$=\frac{-2x^2y+2xy^2}{x^3+y^3}\times\frac{2(x^3+y^3)+2xy(x+y)}{x^3-y^3}$$

$$=\frac{-2xy(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\times\frac{2(x+y)(x^2-xy+y^2+xy)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{-2xy(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\times\frac{2(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

উদা. 4. $\frac{x^2-2x-8}{x^3-8}$, $\frac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12}$ ও $\frac{x^2+9-6x}{x^2-2x+4}$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\frac{x^2-2x-8}{x^3-8}\times\frac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12}\times\frac{x^2+9-6x}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{x^2-4x+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+4)^2-(2x)^2}{x^2-3x-4x+12}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{x(x-4)+2(x-4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{x(x-3)-4(x-3)}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{(x-3)(x-4)}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}=\frac{x^2-x-6}{x-2}.$$

## প্রশ্নমালা 61

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $\frac{ax}{by} \times \frac{bx}{ay}$  2. $\frac{a^2b}{ab^2} \times \frac{b^2a}{ba^2}$

3. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d}$  4. $2a \times 3b \times \frac{b^2}{c^2} \times \frac{c^3}{a^2b^3}$

5. $\frac{abc}{xyz} \times \frac{xy^3}{ab^3} \times \frac{y^2z}{yz^2} \times \frac{z^2x}{zx^2}$  6. $\frac{xy}{ab} \times \frac{bc}{yz} \times \frac{ca}{zx} \times \frac{z^2y}{c}$

7. $\frac{15x^2yz}{17abc^2} \times \frac{51ab}{8xy} \times \frac{32c^3}{3x}$  8. $\frac{13x^3y^4z}{15a^2b^2c^3} \times \frac{5ab^2c^4}{39x^2y^2z^2} \times \frac{9}{10xy^2z^2}$

সরল কর :

9. $2x \times 5y^2 \times \frac{ab}{x^2-y^2} \times \frac{(x-y)^2}{10ab}$

10. $\frac{3(x-y)}{xy} \times \frac{yz}{x(x^2-y^2)}$  11. $\frac{4ab}{a^2-4b^2} \times \frac{a-2b}{2b}$

12. $\frac{3x^2-6x}{x^2-4} \times \frac{6x+12}{27x^3}$  13. $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} \times \frac{a^4-b^4}{(a-b)^2}$

14. $\frac{ab-ac}{bc-ab} \times \frac{ab-b^2}{bc-c^2} \times \frac{c^2-ca}{a^2-ab}$

15. $\frac{ab}{a-b} \times \frac{a^3-b^3}{a^3-a^2b+ab^2} \times \frac{a^3+b^3}{a^2b+ab^2+b^3}$

16. $\frac{x+y+z}{(x+z)^2-y^2} \times \frac{z^2-(x-y)^2}{xy-y^2-yz}$

17. $\left(a+\frac{1}{b}\right) \times \left(a-\frac{1}{b}\right) \times \frac{b^2}{a^2b^2-1}$

18. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+5x+4} \times \frac{x^2+6x+5}{x^2+6x+8} \times \frac{x^2+8x+16}{x^2+8x+15}$

19. $\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+3x+1} \times \frac{2x^2+7x+3}{2x^2+x-1} \times \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}$

20. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} \times \frac{x-y}{xy(x+y)} \times \frac{x^2}{x^2+y^2}$

21. $\frac{1-a^2}{1+b} \times \frac{1-b^2}{a+a^2} \times \left(1+\frac{a}{1-a}\right)$.

22. $\frac{ab}{a^2+ab} \times \frac{a^3+b^3}{a(a^2+ab+b^2)} \times \frac{a^3-b^3}{b(a^2-ab+b^2)}$.

23. $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2} \times \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \times \frac{a^3b+a^2b^2+ab^3}{a^4-b^4}$.

24. $\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{ab}{cd}+\frac{b^2}{d^2}\right)\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{ab}{cd}+\frac{b^2}{d^2}\right)$.

25. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+1+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

26. $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right) \times \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{a^3-b^3}$.

27. $\frac{x^2-2x-8}{x^3+8} \times \frac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12} \times \frac{x^2+9-6x}{x^2+2x+4}$.

28. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) \times \left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)$.

*29. $\left\{\frac{x}{a}+\frac{2x^2}{a(b-x)}\right\} \times \left\{\frac{a}{x}-\frac{2ax}{x(b+x)}\right\}$.

*30. $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right) \times \frac{x^3-y^3}{x^6+y^6} \times \frac{(x-y)^2(x+y)^2+x^2y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

---

**12. ভগ্নাংশের ভাগ।** একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে প্রথম ভগ্নাংশকে অর্থাৎ ভাজ্যকে দ্বিতীয় ভগ্নাংশের বা ভাজকের অন্যোন্যক বা বিপরীত ( reciprocal ) দ্বারা গুণ করিতে হয়। অতঃপর গুণের নিয়মে সরল করিয়া উত্তর নির্ণয় করিতে হয়।

দুইটি ভগ্নাংশের একটির লব ও হর যদি যথাক্রমে অপরটির হর ও লব হয়, তবে ভগ্নাংশ দুইটির একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** বা **বিপরীত** (reciprocal) বলে।

$\frac{x}{y}$ ও $\frac{y}{x}$ পরস্পর অন্যোন্যক বা বিপরীত, $\frac{2}{3}$ ও $\frac{3}{2}$ পরস্পর অন্যোন্যক বা বিপরীত।

$\frac{a}{b}$ কে $\frac{c}{d}$ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাগফল হইবে $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

প্রমাণ। $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$

$$=(a\div b)\div(c\div d),$$ ভগ্নাংশের সংজ্ঞানুসারে,
$$=a\div b\div c\times d,$$ সংযোগ নিয়ম অনুসারে,
$$=a\div b\times d\div c,$$ বিনিময় নিয়ম অনুসারে,
$$=(a\div b)\times(d\div c),$$ সংযোগ নিয়ম অনুসারে,
$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c},$$ ভগ্নাংশের সংজ্ঞা অনুসারে।

সুতরাং, $\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\times\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$.

$\frac{a}{b}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b^2}$; $\frac{p}{q}\div\frac{p}{m}=\frac{p}{q}\times\frac{m}{p}=\frac{m}{q}$; ইত্যাদি।

ভগ্নাংশকে পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা বা পূর্ণ সংখ্যাকে ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলেও এই নিয়ম খাটিবে। এস্থলে স্মরণ রাখিতে হইবে যে, কোন পূর্ণ সংখ্যার নীচে **1** হর রূপে রাখিলে পূর্ণসংখ্যাকে ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা হয়। অতঃপর ভাজক ভগ্নাংশের অন্যোন্যক বা বিপরীত দ্বারা ভাজ্য ভগ্নাংশকে গুণ করিলে প্রাপ্ত গুণফলই নির্ণেয় ভাগফল হইবে।

যথা $\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\div\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$,

$$a\div\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b},$$

$$1\div\frac{a}{b}=1\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}.$$

উদা. 1. $\frac{a^3b^2c}{3x^3y^2z^3}$ কে $\frac{4a^2bc}{3x^2yz^3}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\frac{a^3b^2c}{3x^3y^2z^3}\div\frac{4a^2bc}{3x^2yz^3}=\frac{a^3b^2c}{3x^3y^2z^3}\times\frac{3x^2yz^3}{4a^2bc}=\frac{ab}{4xy}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{3(b-c)}{bc}\div\frac{b^2-c^2}{ab}$.

$$\frac{3(b-c)}{bc}\div\frac{b^2-c^2}{ab}=\frac{3(b-c)}{bc}\times\frac{ab}{b^2-c^2}$$

$$=\frac{3(b-c)}{bc}\times\frac{ab}{(b+c)(b-c)}=\frac{3a}{c(b+c)}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \div \frac{6x^2-5x+1}{6x^2+7x-3}$

$$\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \div \frac{6x^2-5x+1}{6x^2+7x-3} = \frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \times \frac{6x^2+7x-3}{6x^2-5x+1}$$

$$= \frac{2x^2+4x-x-2}{2x^2+3x+6x+9} \times \frac{6x^2+9x-2x-3}{6x^2-2x-3x+1}$$

$$= \frac{2x(x+2)-1(x+2)}{x(2x+3)+3(2x+3)} \times \frac{3x(2x+3)-1(2x+3)}{2x(3x-1)-1(3x-1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)}{(2x+3)(x+3)} \times \frac{(2x+3)(3x-1)}{(3x-1)(2x-1)} = \frac{x+2}{x+3}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x^3-y^3}{x-y} - 3xy\right)$

$$\left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x^3-y^3}{x-y} - 3xy\right)$$

$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2} \div \frac{x^3-y^3-3xy(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \div \frac{(x-y)^3}{x-y} = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \times \frac{x-y}{(x-y)^3} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \div \left\{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} - 1\right\}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4} = \frac{4x^2y^2}{x^4-y^4} \quad \cdots \quad (i)$$

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{4xy}{x^2-y^2} \quad \cdots \quad (ii)$$

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \cdots \quad (iii)$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{4x^2y^2}{x^4-y^4} \div \frac{4xy}{x^2-y^2} \div \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} \times \frac{x^2-y^2}{4xy} \times \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{4x^2y^2}{8x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

## প্রশ্নমালা 62

সরল কর :

1. $\frac{2a^2}{3b} \div \frac{4a}{9b^2}$
2. $\frac{bc}{ad} \div \frac{ab}{cd}$
3. $\frac{a^2bc}{x^2yz} \div \frac{ab^2c}{xy^2z}$

4. $\dfrac{16a^2c^3}{7b^2d^3} \div \dfrac{24a^3c^3}{49b^3d^3}$

5. $\dfrac{3a^2b}{4ab^2} \div \dfrac{5bc^2}{9b^2c} \div \dfrac{3ca^2}{10c^2a}$

6. $\dfrac{8x^2y}{9ab^2} \div \dfrac{10xy^2z}{27a^2b^2} \times \dfrac{yz}{ax}$

7. $1 \div \dfrac{2a^2bc}{3x^3y^2z^4} \times \dfrac{8a^3b^2c}{9x^4yz^3}$

8. $\dfrac{a^2-1}{a^2+1} \div \dfrac{a^4-1}{a^4+2a^2+1}$

9. $\dfrac{x^2-y^2}{a^2-b^2} \div \dfrac{(x-y)^2}{(a-b)^2} \times \dfrac{(a+b)(x-y)}{(x+y)(a-b)}$

10. $\dfrac{4a^2-9ab-9b^2}{4a^2+19ab+12b^2} \div \dfrac{a^2+ab-2b^2}{a^2+6ab+8b^2}$

11. $\dfrac{a^2+6ax+5x^2}{a^2-ax-12x^2} \div \dfrac{a^2+7ax+10x^2}{a^2+5ax+6x^2}$

12. $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2-(b+c)^2} \div \dfrac{(c+a)^2-b^2}{(a-b)^2-c^2}$

13. $\dfrac{8x^3-27y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3} \div \dfrac{4x^2-9y^2}{x^2+2xy+y^2}$

14. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+4}$

15. $\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)} \times \left(1-\dfrac{b}{a}\right) \div \left(1+\dfrac{a}{b}\right)$

16. $\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - 2\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)\right\} \div \left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$

17. $\left(y-\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right) \div \left(x+\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right) \div \dfrac{a^2-y^2}{x^2-a^2}$

18. $\dfrac{a+b}{(a-b)^3} \div \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \div \dfrac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab}$

19. $\left\{\dfrac{a}{(a+b)^2} - \dfrac{b}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a+b)(a-b)}\right\} \div \dfrac{a-b}{a+b}$

20. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right) \div \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right) \times \left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

*21. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left\{1 \div \left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right) - 1 \div \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\right\}$

*22. $\left\{\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}\right) \div \left(\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)\right\}$

$$\div \left\{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b-a}{a+b}\right) \div \left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\right\}$$

# পঞ্চদশ অধ্যায়

## সরল সমীকরণ

1. সপ্তম অধ্যায়ে সরল সমীকরণের সংজ্ঞা এবং সমাধান প্রণালী আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং আক্ষরিক সহগ-যুক্ত সরল সমীকরণের সমাধান প্রণালী কয়েকটি উদাহরণসহ প্রদর্শিত হইতেছে।

আক্ষরিক সহগ-যুক্ত সরল সমীকরণের সমাধানকালে বিশেষরূপে স্মরণ রাখা প্রয়োজন যে সাধারণতঃ $x$ দ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং $a, b, c, m, n, p, q$ ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা জ্ঞাত রাশি বা ধ্রুবক সূচিত হইয়া থাকে। সুতরাং $ax=b$ এই সমীকরণের সমাধান হইবে $x=\frac{b}{a}$. অবশ্য $ax=b$ এই সমীকরণ হইতে $a$-এর মান নির্ণয় করিতে হইলে $a=\frac{b}{x}$ হইবে। কিন্তু প্রচলিত রীতি অনুসারে $ax=b$ সমীকরণের সমাধান হইল $x=\frac{b}{a}$.

**উদা. 1.** সমাধান কর : $ax+b^2=bx+a^2$

$$ax+b^2=bx+a^2$$

পক্ষান্তর করিয়া, $ax-bx=a^2-b^2$

বা, $x(a-b)=a^2-b^2$

$$\therefore\ x=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a+b.$$

**উদা. 2.** সমাধান কর : $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=1$

$$\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=1$$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল. সা. গু. $(a-b)(a+b)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left(\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}\right)(a-b)(a+b)=1.(a-b)(a+b) \qquad \ldots(A)$$

বা, $\frac{x(a-b)(a+b)}{a-b}+\frac{x(a-b)(a+b)}{a+b}=(a-b)(a+b)\cdots(B)$

বা, $x(a+b)+x(a-b)=a^2-b^2$

বা, $x(a+b+a-b)=a^2-b^2$

বা, $x.2a=a^2-b^2$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

দ্রষ্টব্য। কার্যতঃ $(A)$ ও $(B)$ অংশ বাদ দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 3. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$ হইলে, $x$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$$

বা, $\frac{x}{2}-\frac{a}{6}-\frac{x}{3}+\frac{a}{12}+\frac{x}{4}-\frac{a}{20}=0$

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. 60 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$30x-10a-20x+5a+15x-3a=0$$

বা, $30x-20x+15x=10a-5a+3a$

বা, $25x=8a$ বা, $x=\frac{8a}{25}$.

উদা. 4. সমাধান কর: $\frac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\frac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\frac{17-\frac{14}{3}x}{3}$

$$\frac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\frac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\frac{17-\frac{14}{3}x}{3}$$

বা, $\frac{\frac{45-2x}{3}}{5}-\frac{2(2x+5)}{5}=\frac{\frac{51-14x}{3}}{3}$

বা, $\frac{45-2x}{15}-\frac{4x+10}{5}=\frac{51-14x}{9}$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল. সা. গু. 45 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3(45-2x)-9(4x+10)=5(51-14x)$$

বা, $135-6x-36x-90=255-70x$

বা, $-6x-36x+70x=255-135+90$

বা, $28x=210$ বা, $x=\frac{210}{28}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

2. বজ্র গুণন ( Cross Multiplication )।

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $ad = bc$ হয়।

প্রমাণ। $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

উভয় পক্ষকে $bd$ দ্বারা গুণ করিলে, $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$ বা, $ad=bc$.

**উদা. 5.** সমাধান কর : $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

বজ্র গুণন করিয়া, $cx = ab$ বা, $x=\frac{ab}{c}$.

**উদা. 6.** সমাধান কর : $\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)}=3\frac{1}{2}$

$$\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)}=3\tfrac{1}{2} \quad \text{বা,} \quad \frac{7x^2}{2x^2-5x+3}=\tfrac{7}{2}$$

বজ্র গুণন করিয়া, $7x^2\times 2=7(2x^2-5x+3)$

বা, $14x^2=14x^2-35x+21$

বা, $14x^2-14x^2+35x=21$

বা, $35x=21$

বা, $x=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$.

**উদা. 7.** সমাধান কর : $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$

**প্রথম প্রণালী :** $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$

হরসমূহের ল. সা. গু. ·5 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$x-10+100x-1000=0$$

বা, $101x=1010$

$\therefore$ $x=10$.

দ্বিতীয় প্রণালী : $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$

বা, $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{20}}+\frac{x}{\frac{1}{200}}-\frac{1}{\frac{1}{2000}}=0$

বা, $2x-20+200x-2000=0$

বা, $202x=2020$ বা, $x=10.$

## প্রশ্নমালা 63

সমাধান কর :

1. $x(2x+1)=2(x+2)(x-4)+21.$
2. $3(x^2-1)-15=3(x-1)^2-x.$
3. $(3x+1)^2-(3x-2)^2=(2x+3)^2-4(x-1)^2.$
4. $(2x+1)^2+180=4(x+5)^2-3(x-5).$
5. $5\{3x-7(4x-9)\}=2x-66.$
6. $4x-1=5[x-\{7-6(x-3)\}].$
7. $6-3(4x-9)(x-1)=5x-(3x-5)(4x-7).$
8. $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)+\frac{5}{3}=\frac{1}{6}(2x-57).$
9. $\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}.$
10. $\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}+\frac{6-x}{6}=1.$
11. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}.$
12. $\frac{1}{a}+\frac{b}{x}=c.$
13. $\frac{x}{a}-\frac{x}{c}=\frac{a}{b}.$
14. $a(x+a)=b(x+b).$
15. $a(x+c)=b(x+d).$
16. $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x+a}=\frac{9a}{x^2-a^2}.$
17. $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2.$ (W.B.S.F. 1952)
18. $\frac{9x+2}{18x+21}=\frac{2x+9}{4x+35}$
19. $\frac{15x-11}{3x+1}=\frac{5x-7}{x+1}.$

20. $15\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{64}\right)+\frac{7}{8}\left(7-\frac{3x}{4}\right)-\frac{x}{4}\left(3-\frac{8}{x}\right)=0.$

21. $x-\frac{1}{9}(x-13)-\frac{1}{5}(6x+1)-\frac{2}{3}\left(6-\frac{3x}{2}\right)=0.$

22. $\frac{3}{4}(5x-1)-\frac{5(4x-1)-3}{3}=2-3x.$

23. $\frac{2x-3}{6}+\frac{3x-8}{11}=\frac{4x+15}{33}+\frac{1}{2}.$

24. $\frac{b}{x}=\frac{a}{x-b+a}.$

25. $\frac{150}{3x+35}=\frac{27}{2x-1}.$

26. $\frac{12}{2x-1}=\frac{45}{6x+3}.$

27. $\frac{x+3}{2x-1}=\frac{3x+1}{6x-11}.$

28. $\frac{2x+1}{x-2}=\frac{3(2x-1)}{3x-8}.$

29. $\frac{x-a}{x+b}=\frac{2x-a}{2x-b}.$

30. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}.$

31. $\cdot5+\frac{\cdot02x+\cdot07}{\cdot03}-\frac{x+2}{9}=9\cdot5.$

32. $\cdot011x+\frac{\cdot001x-\cdot125}{\cdot6}=\frac{5-x}{\cdot03}-\cdot145.$

33. $\frac{x-4}{\cdot0625}=\frac{x-2}{\cdot05}-4x.$

34. $\frac{1\cdot4x-1}{x+\cdot2}=\frac{\cdot7(x-1)}{\cdot5x-\cdot1}.$

35. $\frac{\cdot4x-\cdot6}{2x-3}=\frac{\cdot06x-\cdot07}{\cdot3x-\cdot4}.$

36. $(a+b-x)(a-b+x)+(a+x)(b+x)-a^2=0.$

---

**3.** কখনও কখনও সমীকরণের কোন পক্ষকে সুবিধামত কয়েকটি অংশে বিভক্ত করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া লইলে সমাধান সহজতর হয়।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$

$$\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16}$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

বা, $\frac{6x+1-3(2x-1)}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বজ্র গুণন করিয়া, $28x-64=30x-60$

বা, $28x-30x=-60+64$

বা, $-2x=4$

$\therefore\ x=-2.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{5x+3}{4}+\frac{78-2x}{21}=\frac{13x-1}{8}+\frac{15-2x}{3}$

$$\frac{5x+3}{4}+\frac{78-2x}{21}=\frac{13x-1}{8}+\frac{15-2x}{3}$$

বা, $\frac{5x+3}{4}-\frac{13x-1}{8}=\frac{15-2x}{3}-\frac{78-2x}{21}$ ( পক্ষান্তর করিয়া )

বা, $\frac{10x+6-13x+1}{8}=\frac{105-14x-78+2x}{21}$

বা, $\frac{-3x+7}{8}=\frac{27-12x}{21}$

বজ্র গুণন করিয়া, $-63x+147=216-96x$

বা, $-63x+96x=216-147$, বা, $33x=69$

$\therefore\ x=\frac{69}{33}=\frac{23}{11}=2\frac{1}{11}.$

উদা. 3. সমাধান কর: $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3.$

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=1+1+1.$$

বা, $\dfrac{x-a}{b+c}-1+\dfrac{x-b}{c+a}-1+\dfrac{x-c}{a+b}-1=0.$ পক্ষান্তর করিয়া,

বা, $\dfrac{x-a-b-c}{b+c}+\dfrac{x-b-c-a}{c+a}+\dfrac{x-c-a-b}{a+b}=0.$

বা, $(x-a-b-c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)=0.$

$\therefore\ x-a-b-c=0,$ $\left[\because\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right.$ ধ্রুবক বলিয়া 0 নহে$\left.\right]$

$\therefore\ x=a+b+c.$

*উদা. 4. সমাধান কর: $\dfrac{x-a^2}{b+c}+\dfrac{x-b^2}{c+a}+\dfrac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c).$

$$\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=(b+c+2a)+(c+a+2b)+(a+b+2c)$$

বা, $\dfrac{x-a^2}{b+c}-(b+c+2a)+\dfrac{x-b^2}{c+a}-(c+a+2b)$
$\qquad\qquad +\dfrac{x-c^2}{a+b}-(a+b+2c)=0.$

বা, $\dfrac{x-a^2-b^2-c^2-2bc-2ab-2ca}{b+c}$
$\qquad +\dfrac{x-b^2-c^2-a^2-2ca-2bc-2ab}{c+a}$
$\qquad +\dfrac{x-c^2-a^2-b^2-2ab-2ca-2bc}{a+b}=0.$

বা, $(x-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)=0.$

$\therefore\ x-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca=0.$

$\left[\because\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right.$ ধ্রুবক বলিয়া 0 নহে। $\left.\right]$

$\therefore\ x=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2.$

## প্রশ্নমালা 64

সমাধান কর :

1. $\frac{3x+8}{5}+\frac{25x-23}{24}=\frac{9x-1}{8}+\frac{16x+31}{35}$.

2. $\frac{2x-1}{3}-\frac{8x-17}{11}=\frac{9x-1}{15}-\frac{14x-38}{22}$.

3. $\frac{2x-6}{9}+\frac{15-2x}{12-5x}=\frac{4x-15}{18}$.

4. $\frac{3x+5}{5(x-5)}+\frac{2x}{5}=\frac{6x+13}{15}$.

5. $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4(x+3)}{9}$.

6. $\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2(1-x)}=\frac{3}{4-2x}+\frac{15}{4(1-x)}$.

7. $\frac{x-a}{c-a}+\frac{x-b}{c-b}=2$.

8. $\frac{m(x-a)}{x+a}+\frac{n(x-b)}{x+b}=m+n$.

9. $\frac{x-a}{3b+5c}+\frac{x-3b}{5c+a}+\frac{x-5c}{a+3b}=3$.

10. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$.

11. $\frac{x-a}{b+c+2a}+\frac{x-b}{c+a+2b}+\frac{x-c}{a+b+2c}+3=0$.

12. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+(a+b+c)=0$.

13. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c$.

*14. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$.

*15. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$.

# ষোড়শ অধ্যায়

## বিবিধ বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে সরল সমীকরণের প্রয়োগ

1. সরল সমীকরণের সাহায্যে বিবিধ প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে অপেক্ষাকৃত কঠিন প্রশ্নের সমাধানে সরল সমীকরণের প্রয়োগ প্রদর্শিত হইতেছে।

উদা. 1. 100 কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের দ্বিগুণ 150 অপেক্ষা যত কম, ক্ষুদ্রতম অংশের তিনগুণ 90 অপেক্ষা তত বেশী।

মনে কর বৃহত্তর অংশ $x$; তাহা হইলে ক্ষুদ্রতর অংশ হইবে $(100-x)$. বৃহত্তর অংশের দ্বিগুণ $2x$, 150 অপেক্ষা $(150-2x)$ কম এবং ক্ষুদ্রতর অংশের তিন গুণ $3(100-x)$, 90 অপেক্ষা $\{3(100-x)-90\}$ বেশী।

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $150-2x=3(100-x)-90$

বা, $150-2x=300-3x-90$

বা, $x=300-90-150=60.$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তর অংশ $=60$ এবং ক্ষুদ্রতর অংশ $=100-60=40.$

উদা. 2. একটি ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 3 বেশী। লব হইতে 3 বিয়োগ করিয়া এবং হরের সহিত 4 যোগ করিয়া যে ভগ্নাংশ গঠিত হয় তাহার মান $\frac{1}{6}$. ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

মনে কর ভগ্নাংশটির লব $x$; তাহা হইলে হর হইবে $x+3$.

সুতরাং ভগ্নাংশটি হইবে $\frac{x}{x+3}$.

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{x-3}{x+3+4}=\frac{1}{6}$ বা, $\frac{x-3}{x-7}=\frac{1}{6}$

বজ্র গুণন করিয়া, $6x-18=x+7$

বা, $6x-x=7+18$ বা, $5x=25$ $\therefore$ $x=5$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$.

উদা. 3. 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ ছিল। 5 বৎসর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি হইবে 68 বৎসর। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, 5 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $x$ বৎসর। সুতরাং 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $3x$ বৎসর।

$\therefore$ পুত্রের বর্তমান বয়স $(x+5)$ বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স $(3x+5)$ বৎসর।

5 বৎসর পরে পুত্র ও পিতার বয়স হইবে যথাক্রমে $(x+5+5)$ বা $(x+10)$ বৎসর এবং $(3x+5+5)$ বা $(3x+10)$ বৎসর।

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $(x+10)+(3x+10)=68$

বা, $4x=68-10-10$ বা, $4x=48$ $\therefore$ $x=12$

অতএব পুত্রের বর্তমান বয়স $=(12+5)=17$ বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স $=(3\times12+5)=41$ বৎসর।

উদা. 4. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 50 এবং প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ অপেক্ষা 15 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম সংখ্যা $x$ ; তাহা হইলে দ্বিতীয় সংখ্যা হইবে $(50-x)$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $2x=\frac{5}{6}(50-x)+15$

বা, $12x=250-5x+90$ ( উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া )

বা, $17x=340$ $\therefore$ $x=20$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 20 এবং $(50-20)$ বা 30.

উদা. 5. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদিগকে যথাক্রমে 5, 7 ও 11 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলির সমষ্টি 9 হইবে।

মনে কর, $x, x+1, x+2$ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{x}{5}+\frac{x+1}{7}+\frac{x+2}{11}=9.$

বা, $77x+55x+55+35x+70=3465$

( উভয় পক্ষকে $5\times7\times11$ দ্বারা গুণ করিয়া )

বা, $77x+55x+35x=3465-55-70$

বা, $167x=3340$ বা, $x=20$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি 20, 21, 22.

*উদা. 6. 96-কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে, প্রতিক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হয়।

মনে কর, প্রতিক্ষেত্রে লব্ধ ফল $x$.

তাহা হইলে প্রথম অংশ হইবে $x-1$, দ্বিতীয় অংশ হইবে $x+2$,

তৃতীয় অংশ হইবে $\frac{x}{3}$ এবং চতুর্থ অংশ হইবে $4x$.

যেহেতু চারিটি অংশের সমষ্টি 96,

সুতরাং $(x-1)+(x+2)+\frac{x}{3}+4x=96$

বা, $3x-3+3x+6+x+12x=288$ ( উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া )

বা, $19x=285$, $\therefore$ $x=15$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশগুলি হইবে $15-1$, $15+2$, $\frac{15}{3}$ এবং $15\times4$

অর্থাৎ 14, 17, 5 এবং 60.

## 2. অঙ্ক (Digit) ও সংখ্যা (Number)।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার দশকের অঙ্কের 10 গুণ এবং এককের অঙ্কের যোগফল সংখ্যাটির সমান হয়।

তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার শতকের অঙ্কের 100 গুণ, দশকের 10 গুণ এবং এককের অঙ্কের যোগফল সংখ্যাটির সমান হয়।

দশকের অঙ্ক $x$ এবং এককের অঙ্ক $y$ হইলে, দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটি হইবে $(10x+y)$ ; আবার ঐ সংখ্যাটির অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন করিলে অর্থাৎ উল্টাইলে যে সংখ্যা হয় উহা হইবে $(10y+x)$।

এইরূপে তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার শতক, দশক, এবং এককের অঙ্ক যথাক্রমে $x, y, z$ হইলে, সংখ্যাটি হইবে $(100x+10y+z)$ এবং উক্ত অঙ্কগুলির স্থান পরিবর্তন করিলে বা উল্টাইলে যে সংখ্যা হয় উহা হইবে $(100z+10y+x)$।

উদা. 7. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের চতুর্গুণ। সংখ্যাটি হইতে 54 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর এককের অঙ্ক $x$ ; তাহা হইলে দশকের অঙ্ক হইবে $4x$.

সুতরাং সংখ্যাটি হইবে $(10.4x+x)=41x$.

অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে নূতন সংখ্যা হয় $(10x+4x)=14x$.

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$$41x-54=14x \quad \text{বা,} \quad 27x=54 \quad \text{বা,} \quad x=2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=41.2=82$.

উদা. 8. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 7 ; সংখ্যাটির সহিত 45 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, দশকের অঙ্ক $x$ ; তাহা হইলে এককের অঙ্ক হইবে $(7-x)$ ; সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা হইবে $10x+(7-x)=9x+7$.

অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে নূতন সংখ্যা হয়

$$10(7-x)+x=70-9x.$$

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$$9x+7+45=70-9x \quad \text{বা,} \quad 18x=18 \quad \therefore \quad x=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=9.1+7=16$.

উদা. 9. 100 খানা আধুলি ও সিকি একত্রে 37 টাকা 75 পয়সা হইলে, আধুলি ও সিকির সংখ্যা কত ?

37 টাকা 75 পয়সা $=37\frac{3}{4}$ টাকা $=\frac{151}{4}$ টাকা।

মনে কর, আধুলির সংখ্যা $x$ ; তাহা হইলে সিকির সংখ্যা হইবে $(100-x)$.

$x$ আধুলি $=\frac{x}{2}$ টাকা ; $(100-x)$ সিকি $=\frac{100-x}{4}$ টাকা

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x}{2}+\frac{100-x}{4}=\frac{151}{4}$

বা, $2x+100-x=151 \quad \therefore \quad x=51$

$\therefore$ আধুলির সংখ্যা $=51$ এবং সিকির সংখ্যা $=100-51=49$,

**উদা. 10.** 30 দিনের জন্য একটি লোক নিযুক্ত করা হইল এই শর্তে যে, যে দিন সে কাজ করিবে সে দিন 2 টাকা 50 পয়সা পাইবে, কিন্তু যে দিন কাজ করিবে না সে দিন তাহাকে 75 পয়সা জরিমানা দিতে হইবে। 30 দিন পরে লোকটি মোট 52 টাকা 25 পয়সা পাইল। সে কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

2 টাকা 50 পয়সা $=2\frac{1}{2}$ টাকা $=\frac{5}{2}$ টাকা ; 75 পয়সা $=\frac{3}{4}$ টাকা ; 52 টাকা 25 পয়সা $=52\frac{1}{4}$ টাকা $=\frac{209}{4}$ টাকা।

মনে কর লোকটি $x$ দিন কাজ করিয়াছিল ; তাহা হইলে লোকটি কাজ করে নাই $(30-x)$ দিন। $x$ দিন কাজ করার জন্য তাহার পাওনা হয় $\frac{5}{2}x$ টাকা, এবং $(30-x)$ দিন কাজ না করার জন্য জরিমানা বাবদ কাটা হয় $\frac{3}{4}(30-x)$ টাকা।

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}(30-x)=\frac{209}{4}$.

বা, $10x-90+3x=209$

বা, $13x=299 \quad \therefore \quad x=23$

অর্থাৎ লোকটি 23 দিন কাজ করিয়াছিল।

*উদা. 11.** একটি মোটরগাড়ীচালক 6 ঘণ্টায় 240 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে, তন্মধ্যে কিছু পথ সে ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে এবং অবশিষ্ট পথ ঘণ্টায় 54 কিলোমিটার বেগে যায়। প্রতি বেগে সে কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

মনে কর, মোটরচালক ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে $x$ কিলোমিটার এবং ঘণ্টায় 54 কিলোমিটার বেগে অবশিষ্ট $(240-x)$ কিলোমিটার অতিক্রম করিয়াছে।

ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে $x$ কিলোমিটার যাইতে সময় লাগে $\frac{x}{30}$ ঘণ্টা এবং ঘণ্টায় 54 কিলোমিটার বেগে $(240-x)$ কিলোমিটার যাইতে সময় লাগে $\frac{240-x}{54}$ ঘণ্টা।

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x}{30}+\frac{240-x}{54}=6$

বা, $9x+1200-5x=1620$ বা, $4x=420$, $\therefore \quad x=105$

$\therefore$ মোটরচালক ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে 105 কিলোমিটার এবং ঘণ্টায় 54 কিলোমিটার বেগে $(240-105)$ বা 135 কিলোমিটার গিয়াছিল।

## প্রশ্নমালা 65

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 61. প্রথম সংখ্যার দ্বিগুণ দ্বিতীয় সংখ্যার দুই-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 10 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

2. একটি খুঁটির অর্ধাংশ মাটির নীচে, এক-তৃতীয়াংশ জলের মধ্যে এবং জলের উপরে যে অংশ আছে উহার দৈর্ঘ্য 70 সে. মি.। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত সেন্টিমিটার?

3. 75 কে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর যেন বৃহত্তর অংশের এক-তৃতীয়াংশ 30 অপেক্ষা যত কম, ক্ষুদ্রতর অংশের চার গুণ 50 অপেক্ষা তত বেশী হয়।

4. দুইটি সংখ্যার একটি অপরটি অপেক্ষা 5 বেশী। বৃহত্তরটির তিন গুণের সহিত ক্ষুদ্রতরটির দ্বিগুণ যোগ করিলে যোগফল হয় সংখ্যা দুইটির অন্তরের 30 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

5. একটি ভগ্নাংশের লব, হর অপেক্ষা 13 কম। লবের সহিত 3 যোগ করিয়া এবং হর হইতে 5 বিয়োগ করিয়া যে ভগ্নাংশ গঠিত হয় উহার মান হয় $\frac{3}{4}$; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

6. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 2; লব ও হর উভয় হইতেই 5 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশ গঠিত হয়, উহার সহিত $\frac{1}{4}$ যোগ করিলে যোগফল হয় 1; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

7. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদিগকে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলির সমষ্টি হইবে 55.

8. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের প্রথমটির $\frac{1}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{1}{4}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{1}{5}$ অংশ একত্রে 50 হয়।

9. এক ব্যক্তি 80-টি আম মোট 9 টাকা মূল্যে কিনিয়াছিল। কয়েকটি সে কিনিয়াছিল টাকায় 8-টি দরে এবং অবশিষ্ট কয়টি কিনিয়াছিল টাকায় 12-টি দরে। কোন্ দরে কয়টি করিয়া আম লোকটি কিনিয়াছিল?

10. $A$, $B$-কে বলে, "আমার বর্তমান বেতনের $\frac{2}{5}$ অংশ তোমার বর্তমান বেতনের $\frac{4}{25}$ অংশের সমান এবং আমাদের উভয়ের বেতনের অন্তর 600 টাকা"। $A$-র বেতন কত?

**11.** এক রাজা 30 বৎসর বয়সের সময় সিংহাসনে আরোহণ করেন এবং তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ কাল রাজত্ব করেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করেন?

(C. U. 1930)

**12.** আমার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে, 6 বৎসর পূর্বে আমার যত বয়স ছিল তাহার তিনগুণ বিয়োগ করিলে আমার বর্তমান বয়সের সমান হয়। আমার বর্তমান বয়স কত?

**13.** 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারগুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। পিতা ও পুত্র প্রত্যেকের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

**14.** 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। পিতার বর্তমান বয়স কত?

*__15.__ আমি কয়েকটি দ্রব্য টাকায় 7-টি দরে ক্রয় করিয়াছিলাম। উহাদের দর যদি 2 টাকায় 13-টি হইত, তাহা হইলে আমার 1 টাকা বেশী ব্যয় হইত। আমি কয়টি দ্রব্য ক্রয় করিয়াছিলাম?

**16.** এক ব্যক্তি 10 টাকা দিয়া 166-টি আম ক্রয় করিল। উহাদের কতকগুলি টাকায় 18-টি দরে এবং অবশিষ্টগুলি টাকায় 15-টি দরে ক্রয় করিয়া থাকিলে, কোন্ প্রকারের কতগুলি আম সে ক্রয় করিয়াছিল?

**17.** 120-টি সিকি ও দশ-পয়সা মুদ্রা একত্রে 15 টাকা 30 পয়সার সমান হইলে, সিকি ও দশ-পয়সা মুদ্রার সংখ্যা কত?

**18.** একটি থলিয়াতে 100-টি মুদ্রা আছে। উহাদের কতকগুলি আধুলি ও বাকীগুলি সিকি। মুদ্রাগুলির মোট মূল্য 40 টাকা হইলে, আধুলি ও সিকির সংখ্যা কত?

**19.** 246 টাকা দিয়া মোট 13 খানা চেয়ার ও টেবিল ক্রয় করা হইল। প্রতি চেয়ারের মূল্য 12 টাকা এবং প্রতি টেবিলের মূল্য 30 টাকা হইলে, চেয়ার ও টেবিলের সংখ্যা কত?

*20. 20 দিনের জন্য একটি লোক নিযুক্ত করা হইল এই শর্তে যে, যে দিন সে কাজ করিবে সে দিন 2 টাকা 25 পয়সা পাইবে এবং যে দিন কাজ না করিবে প্রত্যহ 75 পয়সা হিসাবে জরিমানা তাহার প্রাপ্য হইতে কাটিয়া রাখা হইবে। 20 দিন পরে লোকটি 30 টাকা পাইয়া থাকিলে, সে কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

*21. কাজ করিলে প্রত্যহ 3 টাকা 25 পয়সা হিসাবে পাইবে, কিন্তু কাজ না করিলে প্রতি দিনের জন্য 1 টাকা 25 পয়সা করিয়া জরিমানা দিতে হইবে এই শর্তে 30 দিনের জন্য একটি লোককে রাখা হইল। লোকটি যদি 30 দিন পরে মোট 70 টাকা 50 পয়সা পাইয়া থাকে, তবে সে কত দিন কাজ করে নাই নির্ণয় কর।

22. 840 টাকা মূল্যে একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় কিছু ক্ষতি হইল। যদি 1050 টাকা মূল্যে ঘোড়াটি বিক্রয় করা হইত, তাহা হইলে পূর্বের ক্ষতি যত তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হইত। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

*23. এক ব্যক্তির যত ঋণ ছিল সে তাহার $\frac{1}{3}$ অংশ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী পরিশোধ করিয়া দেখিল যে সে যত টাকা পরিশোধ করিয়াছে তদপেক্ষা তাহার আরও 210 টাকা বেশী ঋণ অবশিষ্ট রহিয়াছে। তাহার সম্পূর্ণ ঋণের পরিমাণ কত ছিল ? (C. U. 1913)

24. এক ব্যক্তি 25 পয়সায় ডজন হিসাবে কিছু লেবু ক্রয় করিয়া দেখিল যে উহার মধ্যে 50-টি লেবু পচা। অবশিষ্ট লেবু টাকায় 36-টি দরে বিক্রয় করিয়া সে মোট 6 টাকা 25 পয়সা লাভ করিল। সে কত লেবু ক্রয় করিয়াছিল ?

*25. এক ব্যক্তির বয়স তাহার দুইটি পুত্রের বয়সের সমষ্টির তিন গুণ। 7 বৎসর পরে পুত্র দুইটির বয়সের সমষ্টির আটগুণ পিতার বয়সের পাঁচ গুণের সমান হইবে। ঐ ব্যক্তির বর্তমান বয়স কত ?

*26. 20-কে এমন চারি অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হইবে।

*27. 154-কে এমন চারি অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের সহিত 5 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 7 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হইবে।

28. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

29. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 11 ; বামদিকের (দশকের) অঙ্কটির সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল হইবে সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

30. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্কের 3 গুণ। সংখ্যাটির সহিত 36 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

31. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির অন্তর 4 ; ক্ষুদ্রতর দশকের অঙ্কের 13 গুণের সহিত 36 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায় : সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

32. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 10 ; সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

*33. তিনটি অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার প্রত্যেক অঙ্ক উহার পরবর্তী অঙ্ক অপেক্ষা 1 কম। সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল অঙ্ক তিনটির সমষ্টির 16 গুণ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। (C. U. 1949)

*34. তিন অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার অঙ্ক তিনটি ক্রমিক সংখ্যা। একক ও শতকের অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যা হয় উহার এবং নির্ণেয় সংখ্যার অন্তর হয় বৃহত্তম অঙ্কের 33 গুণ। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

*35. একখানি উঠানের দৈর্ঘ্য বিস্তার অপেক্ষা 5 মিটার বেশী। যদি দৈর্ঘ্য 5 মিটার বাড়ান এবং বিস্তার 3 মিটার কমান হইত, তাহা হইলে ক্ষেত্রফলের কোন পরিবর্তন হইত না। উঠানের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার নির্ণয় কর।

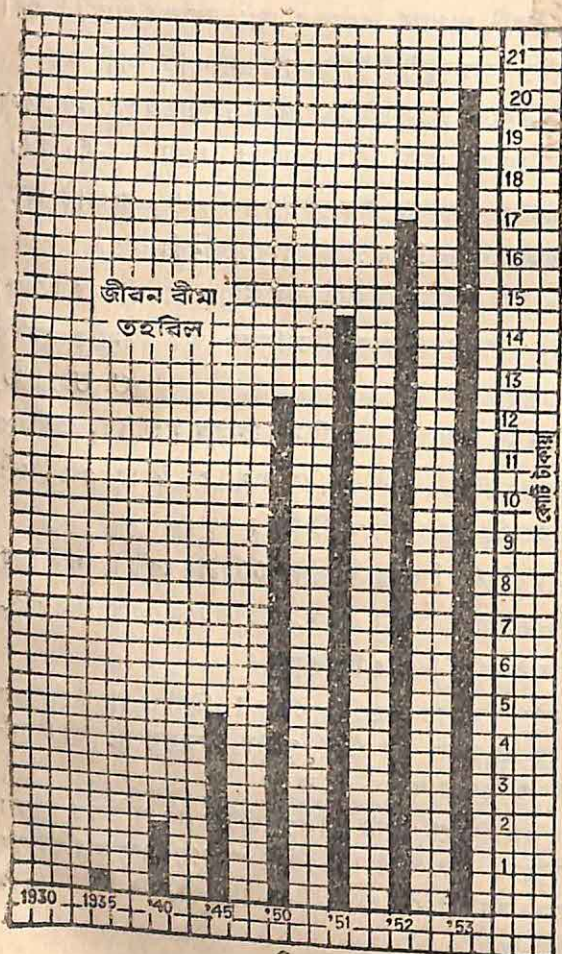
*36. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়াইলে এবং বিস্তার 1 মিটার কমাইলে যে ক্ষেত্রফল হয় উহা পূর্বের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা 5 বর্গ-মিটার কম। ঘরখানির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত নির্ণয় কর।

*37. এক ব্যক্তি 1 ঘণ্টা 15 মিনিটে মোট 7 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে। উক্ত পথের কিছু অংশ সে ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার বেগে পদব্রজে এবং অবশিষ্ট পথ ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগে অশ্বারোহণে যায়। পদব্রজে সে কত কিলোমিটার পথ গিয়াছিল?

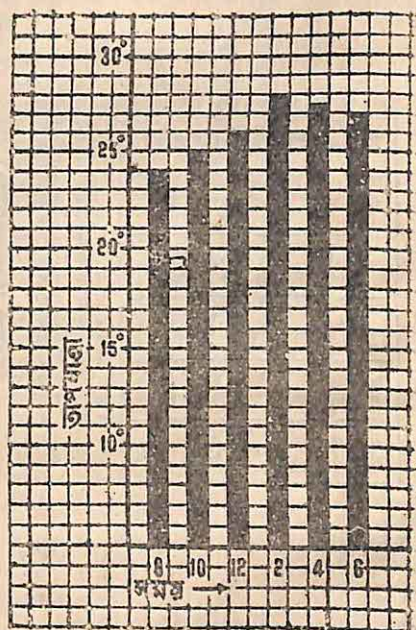
# সপ্তদশ অধ্যায়

## স্তম্ভ-লেখ ও ছক-কাগজের ব্যবহার

### স্তম্ভ-লেখ (Column Graph)

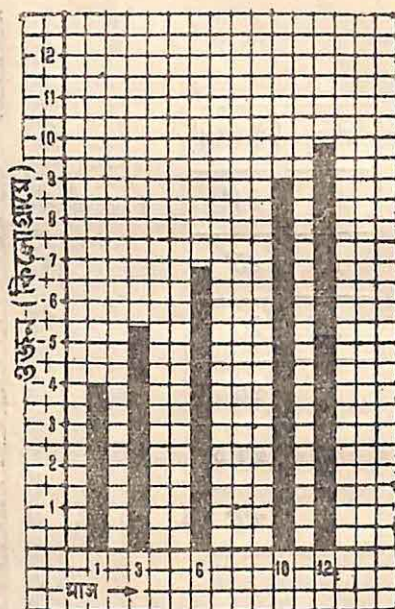
**1. স্তম্ভ-লেখ।** সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশের অষ্টম অধ্যায়ে পরিসংখ্যানমূলক তথ্যগুলি অনুভূমিক লেখ দ্বারা কত স্পষ্টভাবে প্রকাশ করা যায় তাহা দেখান হইয়াছে। ঐ জাতীয় তথ্যগুলি স্তম্ভ-লেখ দ্বারাও কিরূপে পরিস্ফুট করা যায় তাহা কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা দেখান হইতেছে।

**উদা. 1.** নিউ ইণ্ডিয়া এস্যুরেন্স কোম্পানীর 1935 খ্রীষ্টাব্দ হইতে 1953 খ্রীষ্টাব্দ পর্যন্ত জীবন-বীমা তহবিলের ক্রমিক উন্নতির একটি লেখ চিত্র দেখান হইতেছে। (আনন্দবাজার পত্রিকা, 18-8-54)

উদা. 2. কলিকাতা মহানগরীর একটি দিনের 8-টা হইতে সন্ধ্যা 6-টা পর্যন্ত প্রতি দুই ঘণ্টা অন্তর লিখিত সেন্টিগ্রেড তাপমাত্রার একটি তালিকা প্রদত্ত হইল। একটি স্তম্ভ-লেখ-দ্বারা তাপমাত্রার পরিবর্তন প্রদর্শন কর।

| সময় | উত্তাপ |
|---|---|
| 8 | 24° |
| 10 | 25° |
| 12 | 26° |
| 2 | 28° |
| 4 | 27·5° |
| 6 | 27° |

তাপমাত্রার পরিবর্তনের লেখ-চিত্র

উদা. 3. একটি স্বাস্থ্যবান্ শিশুর জন্মের প্রথম মাস হইতে এক বৎসর পর্যন্ত

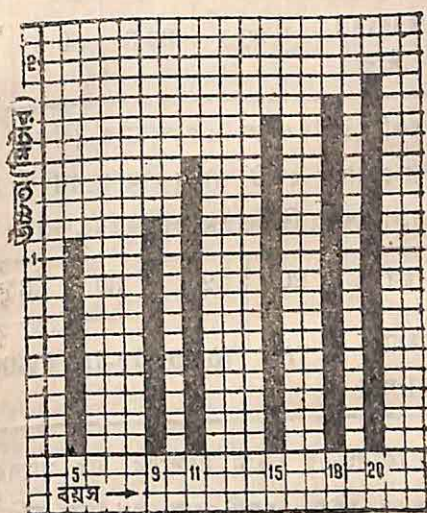
কয়েক মাসের দৈহিক ওজনের একটি তালিকা প্রদত্ত হইল। একটি স্তম্ভ-লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর নির্ণয় কর।

| মাস | ওজন (কিলোগ্রাম) |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 5·4 |
| 6 | 6·8 |
| 10 | 9 |
| 12 | 9·8 |

একটি শিশুর দৈহিক ওজনের লেখ-চিত্র

(1) শিশুর চতুর্থ মাসের ওজন মোটামুটি কত হইবে মনে হয়?
(2) শিশুর নবম মাসের ওজন মোটামুটি কত?
(3) শিশুর ওজন 7 কিলোগ্রাম কোন্ মাসে হইতে পারে?

উদা. 4. একটি বালকের 5 বৎসর হইতে 20 বৎসর পর্যন্ত গড় উচ্চতার একটি তালিকা প্রদত্ত হইল ; একটি স্তম্ভ-লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| বয়স (বৎসর) | উচ্চতা (মিটার) |
|---|---|
| 5 | 1·1 |
| 9 | 1·2 |
| 11 | 1·5 |
| 15 | 1·7 |
| 18 | 1·8 |
| 20 | 1·9 |

উচ্চতা (মিটার)
2
1
5 9 11 15 18 20
বয়স →

বয়স অনুপাতে গড়-উচ্চতার লেখ-চিত্র

## প্রশ্নমালা 66

1. কোন জ্বরাক্রান্ত রোগীর সোমবার হইতে রবিবার পর্যন্ত সাত দিনের শরীরের গড় উত্তাপের একটি তালিকা দেওয়া হইল ; একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কিত করিয়া উত্তাপের পরিবর্তন দেখাও।

| বার | সো. | ম. | বু. | বৃ. | শু. | শ. | র. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| উত্তাপ | 105° | 104° | 103·5° | 102·5° | 101° | 100° | 99·5° |

2. একটি দেশের ছয় বৎসরের লোক-সংখ্যার একটি তালিকা দেওয়া আছে; একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কিত করিয়া জনসংখ্যার বৃদ্ধি দেখাও।

| বৎসর | 1940 | 1941 | 1942 | 1943 | 1944 | 1945 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| জনসংখ্যা (লক্ষে) | 30·1 | 30·3 | 30·4 | 30·6 | 31·1 | 31·5 |

3. একটি ইন্‌সিওরেন্স কোম্পানীর বিভিন্ন বয়সে প্রতি হাজার টাকার 15 বৎসরের মেয়াদী একটি জীবন-বীমার বার্ষিক প্রিমিয়ামের হার দেওয়া হইল; একটি স্তম্ভ-লেখ দ্বারা প্রিমিয়ামের পরিবর্তন দেখাও।

| বয়স | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| প্রিমিয়াম (টাকা-প.) | 75 | 75-25 | 75-75 | 77-00 | 79-50 | 83-50 | 89-75 |

4. দার্জিলিং-এর কোন বৎসরের বার মাসের বৃষ্টিপাতের পরিমাণের একটি তালিকা দেওয়া হইল, একটি স্তম্ভ-লেখ-চিত্র অঙ্কিত করিয়া বৃষ্টিপাতের পরিবর্তন দেখাও।

| মাস | জা. | ফে. | মা. | এ. | মে. | জু. | জু. | আ. | সে. | অ. | ন. | ডি. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| বৃষ্টিপাত (সে. মি.) | ·89 | 1·3 | 2·8 | 10 | 18 | 51 | 56 | 64 | 83·5 | 10·5 | 7·6 | 3 |

5. কোন ব্যবসায়ীর মূলধনের উপর এক বৎসরের প্রতি মাসের লাভের শতকরা হার দেওয়া হইল; একটি স্তম্ভ-লেখ-চিত্র অঙ্কিত করিয়া লাভের পরিবর্তন দেখাও।

| মাস | জা. | ফে. | মা. | এ. | মে. | জু. | জু. | আ. | সে. | অ. | ন. | ডি. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লাভের শতকরা হার | 10 | 12 | 15 | 20 | 18 | 21 | 20 | 15 | 22 | 17 | 15 | 20 |

6. চেরাপুঞ্জির মাসিক গড় বৃষ্টিপাতের একটি তালিকা দেওয়া হইল; একটি

স্তম্ভ লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর। লেখ হইতে দেখাও কোন্ মাসে সর্বাধিক বৃষ্টিপাত হয় এবং কোন মাসে সর্বনিম্ন বৃষ্টিপাত হয়।

| মাস | জা. | ফে. | মা. | এ. | মে. | জু. | জু. | আ. | সে. | অ. | ন. | ডি. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| বৃষ্টিপাত (সে. মি.) | 1·8 | 7·2 | 25·4 | 78·4 | 127 | 282·4 | 248·4 | 207 | 82·8 | 54·4 | 7·2 | 1·1 |

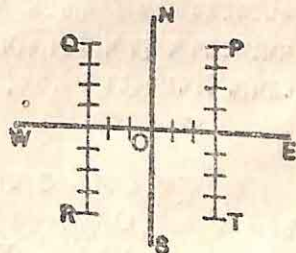
7. কোন দেশের বালিকাদের বিভিন্ন বয়সের মোটামুটি গড় ওজনের একটি তালিকা দেওয়া হইল; একটি স্তম্ভ লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

| বয়স ( বৎসর ) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ওজন (কিলোগ্রাম) | 10 | 14 | 16 | 20 | 24 | 30·5 | 37·5 | 45 | 47 | 48 | 48 | 47 |

## ছক কাগজের ব্যবহার

2. মানচিত্র ব্যবহারের সময় মানচিত্রের উপরের দিক্‌কে উত্তর, নীচের দিক্‌কে দক্ষিণ, ডান দিক্‌কে পূর্ব ও বাম দিক্‌কে পশ্চিম বলিয়া ধরার রীতি আছে। পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত একটি সরলরেখা ও উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত একটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। মানচিত্রে পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত সরলরেখাকে **অনুভূমিক** ( Horizontal ) এবং উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব** ( Vertical ) সরলরেখা বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে EW অনুভূমিক এবং NS উল্লম্ব সরলরেখা দুইটি পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন যদি ধরা যায় যে পার্শ্বের চিত্রের প্রত্যেক দাগ এক মিটারের সমান, এবং কোন লোককে যদি বলা হয় যে তাহাকে O-বিন্দু হইতে প্রথমতঃ পূর্ব দিকে 3 মিটার গিয়া তথা হইতে উত্তর দিকে 4 মিটার যাইতে হইবে, তাহা হইলে সে O-বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া OE সরলরেখার বরাবর 3 দাগ গিয়া তথা হইতে উপরের দিকে 4 দাগ যাইবে

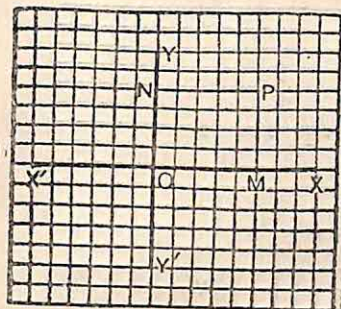
এবং সে নিশ্চয়ই P-বিন্দুতে পৌঁছিবে। যদি বলা হয় 3 মিটার পশ্চিমে গিয়া 4 মিটার উত্তরে যাইতে হইবে, তাহা হইলে সে O-বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া OW

সরলরেখার বরাবর 3 দাগ গিয়া তথা হইতে উপরের দিকে 4 দাগ যাইবে এবং সে নিশ্চয়ই Q-বিন্দুতে পৌছিবে। এইরূপ সে 3 মিটার পশ্চিমে ও তথা হইতে 4 মিটার দক্ষিণে যাইয়া R-বিন্দুতে এবং 3 মিটার পূর্বে ও তথা হইতে 4 মিটার দক্ষিণে যাইয়া T-বিন্দুতে পৌছিবে। ফলতঃ EW এবং NS এই দুইটি নির্দিষ্ট অসীম সরলরেখার সাহায্যে একই অসীম সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে পারা যায়।

**3. অক্ষ ও মূলবিন্দু।** গণিতশাস্ত্রে এই নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটিকে পূর্ব-পশ্চিমে ও উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত সরলরেখা না বলিয়া প্রত্যেককে **অক্ষ** (Axis) বলা হয় এবং ইহাদিগকে EW এবং NS নামে নির্দিষ্ট না করিয়া XX′ এবং YY′ নামে নির্দিষ্ট করা হয়। ইহাদের ছেদবিন্দু O-কে **মূলবিন্দু** (Point of Origin) বলা হয়।

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে কোনও সমতলে অনুভূমিক ও উল্লম্ব দুইটি সরলরেখা ও তাহাদের ছেদ-বিন্দুর ( মূলবিন্দু ) অবস্থান নির্দিষ্ট হইলে উক্ত সমতলের যে কোন বিন্দুর অবস্থান সহজেই নির্ণয় করা যায়। এরূপ স্থলে অনুভূমিক XX′ সরলরেখাকে $x$-অক্ষ এবং উল্লম্ব YY′ সরলরেখাকে $y$ অক্ষ বলা হয়।

**4. ছক কাগজ।** একখণ্ড কাগজের উপর সমদূরবর্তী কতকগুলি অনুভূমিক এবং কতকগুলি উল্লম্ব সরলরেখা অঙ্কিত করিলে সমগ্র কাগজখণ্ড কতিপয় সমান আকারের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে। এইরূপ বর্গাঙ্কিত কাগজকে **ছক-কাগজ** (Squared paper) বলা হয়। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বা উহার দ্বিগুণ, তিনগুণ ইত্যাদিতে যে কোন স্কেলে সেন্টিমিটার, মিটার, কিলোমিটার ইত্যাদি রূপে কল্পনা করা চলে। কোন বিশেষ পরিমাপের উল্লেখ না থাকিলে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 'একক' বলিলেও চলিতে পারে। এরূপ স্থলে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর পাঁচগুণ দীর্ঘ সরলরেখার দৈর্ঘ্য হইবে 5 একক, ছয়গুণ দীর্ঘ সরলরেখার দৈর্ঘ্য হইবে 6 একক, ইত্যাদি। আবার প্রতি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে 1 বর্গ একক।

**5. ভুজ, কোটি ও স্থানাঙ্ক।** পরের পৃষ্ঠার ছক কাগজে XX′ এবং YY′ দুইটি অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। এই ছক কাগজের সমতলে যে কোন P-বিন্দু লওয়া হইল। এখন XX′ ও YY′ সরলরেখা দুইটি হইতে P-বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। P হইতে XX′-এর উপর PM এবং YY′-এর উপর PN লম্ব টান। এখন PM এবং PN, XX′ ও YY′ হইতে P-বিন্দুর দূরত্ব প্রকাশ করিতেছে।

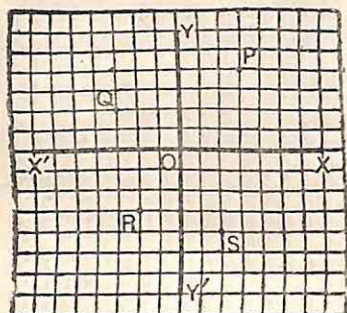
এই দূরত্বের সাংখ্যমানকে P-বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** ( Co-ordinates ) বলা হয়। চিত্র হইতে দেখা যায় PN = OM. সুতরাং P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইলে P হইতে XX'-এর উপর PM লম্ব টান। তাহা হইলে OM এবং PM-এর দৈর্ঘ্যমান P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক। ইহাদের মধ্যে OM হইল P-বিন্দুর $x$ স্থানাঙ্ক ( $x$-co-ordinate ) বা **ভুজ** (Abscissa) এবং PM হইল P-বিন্দুর $y$-স্থানাঙ্ক ($y$-co-ordinate) বা **কোটি** ( Ordinate )।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইলে, উপরের চিত্রে গণনাদ্বারা দেখা যায় P বিন্দুর $x$-স্থানাঙ্ক বা ভুজ 5 একক এবং $y$-স্থানাঙ্ক বা কোটি 4 একক।

6. **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভুজ-কোটি।** অক্ষ দুইটির OX ও OY-কে যথাক্রমে $x$-অক্ষের ও $y$-অক্ষের ধনাত্মক (Positive) দিক্ এবং OX' ও OY'-কে যথাক্রমে $x$-অক্ষের ও $y$-অক্ষের ঋণাত্মক ( Negative ) দিক্ বলা হইয়া থাকে। O-বিন্দু হইতে ডানদিকে যে কোন বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে যে কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক। আবার O-বিন্দু হইতে উপরের দিকে যে কোন বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচের দিকে যে কোন বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক। ছক কাগজে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক্ সম্বন্ধে ইহাই প্রচলিত রীতি।

7. **পাদ।** দুই অক্ষ ছক কাগজের সমতলকে চারিটি অংশে বিভক্ত করে। উহাদের প্রত্যেক অংশকে **পাদ** ( Quadrant ) বলে। XOY, X'OY, X'OY' এবং XOY'-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ বলা হয়।

সুতরাং কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক হইলে উক্ত বিন্দু XOY কোণের মধ্যে বা প্রথম পাদে (First Quadrant) অবস্থিত হইবে। কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক হইলে উক্ত বিন্দু X'OY কোণের মধ্যে বা দ্বিতীয় পাদে ( Second Quadrant ) অবস্থিত হইবে। ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক এরূপ যে কোন বিন্দু X'OY' কোণের মধ্যে বা তৃতীয় পাদে (Third Quadrant) এবং ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক এরূপ যে কোন বিন্দু XOY' কোণের মধ্যে বা চতুর্থ পাদে (Fourth Quadrant) অবস্থিত হইবে।

8. **স্থানাঙ্ক।** দুইটি সংখ্যা দ্বারা কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রকাশ করা হয়; উহাদের প্রথমটি $x$-স্থানাঙ্ক বা ভুজ ও দ্বিতীয়টি $y$-স্থানাঙ্ক বা কোটি প্রকাশ করে।

(3, 4) এই বিন্দুটি স্থাপন করিতে হইলে, লক্ষ্য করিতে হইবে নির্ণেয় বিন্দুর $x$-স্থানাঙ্ক 3 ও $y$-স্থানাঙ্ক 4 এবং উভয়ই ধনাত্মক। সুতরাং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক লইয়া OX সরলরেখায় 3 একক এবং তথা হইতে উপরের দিকে 4 একক গণিয়া সেই স্থানে বিন্দু স্থাপন করিলেই (3, 4), বিন্দু স্থাপন করা হইবে। চিত্রে P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4)

(–3, 2) বিন্দু স্থাপন করিতে হইলে OX′ সরলরেখায় 3 একক এবং তথা হইতে উপরের দিকে 2 একক গণিয়া বিন্দু স্থাপন কর। চিত্রে Q-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 2)। এইরূপে R-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, –3) এবং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, –4)। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)।

**9. ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন প্রণালী।** নিম্নে ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন প্রণালীর কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

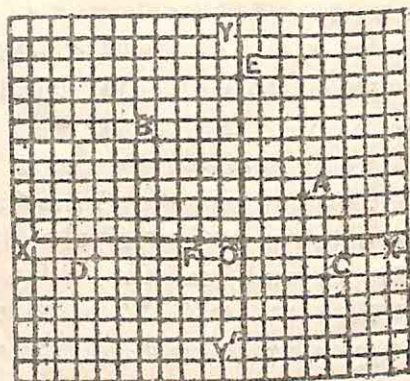
উদা. 1. A (3, 2), B (–4, 5), C (4, –2) D (–7, –1), E (0, 8), ও F (–2, 0) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। কোন্ বিন্দু কোন্ পাদে অবস্থিত হইল বল।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

মূলবিন্দু O হইতে ডানদিকে 3 একক এবং তারপর উপরে 2 একক যাও—A (3, 2) বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা প্রথম পাদে অবস্থিত।

O হইতে বামদিকে 4 একক এবং তারপর উপরে 5 একক যাও—B(–4,5) বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

O হইতে ডানদিকে 4 একক এবং তারপর নীচের দিকে 2 একক যাও—C (4, –2) বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

O হইতে বামদিকে 7 একক এবং পরে নীচের দিকে 1 একক যাও—D (–7, –1) বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

O বিন্দু হইতে ডানদিকে বা বামদিকে না গিয়া উপরে 8 একক যাও—(0,8) বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

O বিন্দু হইতে বামদিকে 2 একক যাও—F $(-2, 0)$ বিন্দুতে যাওয়া হইল। ইহা $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

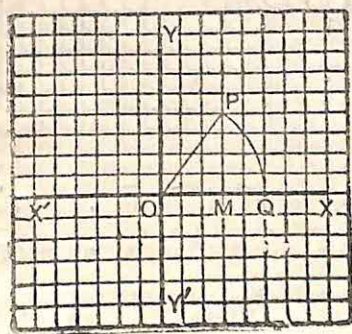
উদা. 2. $(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{3})$ বিন্দু তিনটি যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে স্থাপন কর।

বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ভগ্নাংশযুক্ত। ভগ্নাংশগুলির হরসমূহের ল. সা. গু. 6। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যের 6 গুণ একক ধর। তাহা হইলে মূলবিন্দু O হইতে ডানদিকে $(1\frac{1}{2} \times 6)$ বা 9 ঘর গিয়া তথা হইতে উপরে $(1\frac{1}{3} \times 6)$ বা 8 ঘর যাও—A বিন্দুতে অর্থাৎ $(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$ বিন্দুতে যাওয়া হইল।

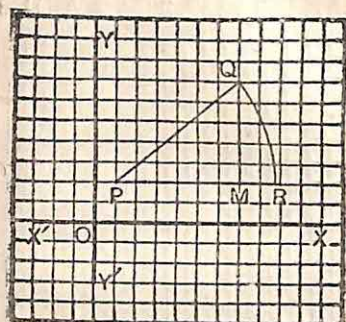
O হইতে বামদিকে $(\frac{1}{2} \times 6)$ বা 3 ঘর গিয়া তথা হইতে উপরে $(1\frac{2}{3} \times 6)$ বা 10 ঘর যাও—B বিন্দুতে অর্থাৎ $(-\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3})$ বিন্দুতে যাওয়া হইল।

O হইতে ডানদিকে $(\frac{1}{2} \times 6)$ বা 3 ঘর গিয়া তথা হইতে নীচের দিকে $(1\frac{1}{3} \times 6)$ বা 8 ঘর যাও—C বিন্দুতে অর্থাৎ $(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{3})$ বিন্দুতে যাওয়া হইল।

10. **দুই বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।** নিম্নে ছক কাগজে দুই বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় মূলক কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

**উদা. 3.** (3, 4) বিন্দু স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

XX', YY'-অক্ষদ্বয় এবং O মূলবিন্দু ধরিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া (3, 4) বিন্দু P-চিহ্নিত করা হইল। OP যুক্ত কর।

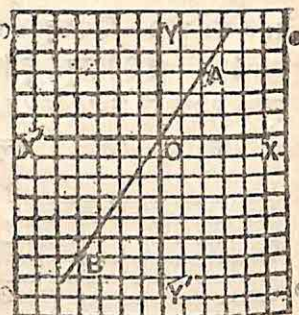
O-কে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা OX-কে Q-বিন্দুতে ছেদ করে। গণনা দ্বারা দেখা যায় OQ = 5 একক। সুতরাং OP = 5 একক।

উদা. 4. (1, 2) ও (7, 7) বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (1, 2) এবং (7, 7) বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে P ও Q দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ যুক্ত কর।

P-কে কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত XX' এর সমান্তরাল সরলরেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। গণনা দ্বারা দেখা যায় PR = 7·8 একক (স্থূলতঃ)। ∴ PQ = 7·8 একক (প্রায়)।

উদা. 5. (2, 3), (−4, −6) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। দেখ এই সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

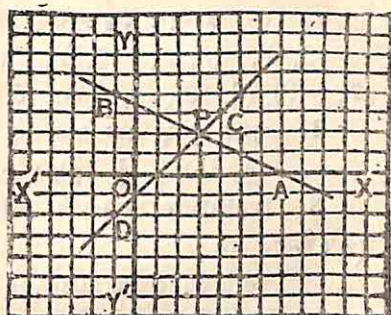
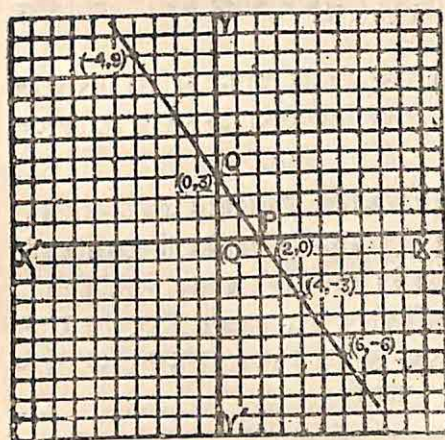
ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

A (2, 3) বিন্দু এবং B (−4, −6) বিন্দু স্থাপন করা হইল এবং উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা হইল। দেখা গেল যে এই সরলরেখা মূলবিন্দু O দিয়া গিয়াছে।

উদা. 6. (7, 0), (−1, 4) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। (4, 3), (−1, −2) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকেও একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। এই দুইটি সরলরেখা যে বিন্দুতে ছেদ করিল উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

A (7, 0) বিন্দু এবং B (−1, 4) বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদিকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা হইল।

C (4, 3) বিন্দু এবং D (−1, −2) বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কয়া হইল।

সরলরেখা দুইটি P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2)।

**উদা. 7.** নিম্নে তিনটি বিন্দুর ভুজ-কোটি বা স্থানাঙ্ক তালিকাবদ্ধ করা আছে। বিন্দু তিনটি স্থাপন কর। উহাদের যে কোন দুইটিকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া সরলরেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। দেখিবে ইহা তৃতীয় বিন্দু দিয়াও যাইবে। এই সরলরেখা $x$ অক্ষ এবং $y$-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

| $x$ | 6 | 4 | −4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | −6 | −3 | 9 |

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

(6, −6), (4, −3), (−4, 9) বিন্দু তিনটি স্থাপন করা হইল। (6, −6) (4, −3) বিন্দু দুইটি একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা হইল এবং উহাকে উভয় দিকে বর্ধিত করা হইল। দেখা গেল এই বর্ধিত সরলরেখা (−4, 9) বিন্দু দিয়াও গিয়াছে।

এই সরলরেখা $x$-অক্ষকে P বিন্দুতে এবং $y$-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 0) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3)।

## প্রশ্নমালা 67

**1.** ছক কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

(2, 3), (3, 4), (5, 6), (−2, 3), (−4, 5), (−4, −5), (5, −3), (7, −8), (0, 10), (0, −6), (5, 0), (−5, 0), (−2, 8), (3, −2), (0, 0).

**2.** পৃথক্ পৃথক্ অক্ষ ও একক নির্দেশ করিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

$(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}), (1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

**3.** নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহাদের প্রত্যেকের দূরত্ব নির্ণয় কর :

(6, 8) ; (−5, 12) ; (−4, −3) ; (3, −6).

**4.** নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর :

(1, 2) ও (4, 6) ; (−2, 7) ও (−10, 1) ; (−6, 0) ও (−3 −5).

**5.** (1, 3), (−2, −6) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। দেখাও এই সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।

**6.** (2, 1), (−4, −3), (8, 5) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর। প্রথম দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া ইহাকে বর্ধিত কর। দেখাও ইহা তৃতীয় বিন্দু দিয়াও যাইবে।

**7.** (1, 1), (4, 3), (−8, −5), (7, 5) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। দেখাও যে বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

**8.** (5, 3), (1, −3), (−1, −6) বিন্দু তিনটি স্থাপন করিয়া দেখাও যে উহারা একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত। এই সরলরেখা $x$-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**9.** (0, 2), (3, −1) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। (1, 9), (−3, −3) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকেও একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। এই সরলরেখা দুইটির ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**10.** নিম্নে চারিটি বিন্দুর ভুজ-কোটি তালিকাবদ্ধ করা আছে। বিন্দুগুলি স্থাপন কর এবং ইহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু যুক্ত করিয়া উৎপন্ন সরলরেখাটিকে বর্ধিত কর। দেখাও ইহা অবশিষ্ট বিন্দু দুইটি দিয়াও যায়।

| $x=$ | 0 | 3 | −6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $y=$ | 1 | 3 | −3 | 7 |

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 2. ( পৃঃ 9-10 )

**1.** 18. **2.** 16. **3.** 10. **4.** 20. **5.** 24.
**6.** 7. **7.** 18. **8.** 23. **9.** 13. **10.** 9.
**11.** 1. **12.** 11. **13.** 42. **14.** 73. **15.** 138.
**16.** 360. **17.** 246. **18.** 18. **19.** $\frac{5}{12}$. **20.** $\frac{3}{4}$.
**21.** $\frac{3}{4}$. **22.** $1\frac{1}{12}$. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{36}$. **25.** $\frac{43}{72}$.
**26.** 1. **27.** $3\frac{1}{3}$. **28.** $\frac{61}{144}$. **29.** $6\frac{1}{4}$. **30.** $3\frac{5}{6}$.
**31.** $12\frac{3}{4}$. **32.** $8\frac{1}{2}$. **33.** $\frac{3}{4}$. **34.** $1\frac{9}{10}$. **35.** $\frac{271}{360}$.
**36.** $3\frac{59}{60}$. **37.** $\frac{17}{24}$. **38.** 55. **39.** 0. **40.** 174.
**41.** প্রভেদ নাই ; 942 = নয়শত বিয়াল্লিশ এবং 9.4.2 = 72.

## প্রশ্নমালা 3. ( পৃঃ 11 )

**1.** 8. **2.** 5. **3.** 24. **4.** 25. **5.** 89.
**6.** 0. **7.** 200. **8.** 0. **9.** $\frac{5}{16}$. **10.** $\frac{8}{5}$.

## প্রশ্নমালা 4. ( পৃঃ 12 )

**1.** 8. **2.** 18. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 36. **5.** $\frac{1}{2}$.
**6.** 9. **7.** $\frac{1}{4}$. **8.** $13\frac{1}{2}$. **9.** 1. **10.** 7.
**11.** 12. **12.** 12. **13.** $5\frac{1}{3}$. **14.** 0.

## প্রশ্নমালা 5. ( পৃঃ 16-17 )

**1.** 143. **2.** 54. **3.** 819. **4.** 370.
**5.** 26595. **6.** 2895. **7.** 6. **8.** 8.
**9.** 16. **10.** 14. **11.** 8. **12.** 52.
**13.** 256. **14.** 10. **15.** (*i*) 10. (*ii*) 44. (*iii*) 52
**17.** 4, 9, 16, 25. **18.** উভয় ক্ষেত্রেই মান 0.
**20.** (*i*) 8. (*ii*) 9. (*iii*) 4. (*iv*) 4. (*v*) 8.

## প্রশ্নমালা 7. ( পৃঃ 20 )

1. 20.  2. 16.  3. 6.  4. 4.
5. 40.  6. 14.  7. 26.  8. 84.

## প্রশ্নমালা 8. ( পৃঃ 22 )

1. $a+2b$.  2. $3a+4c$.  3. $2x+5y$.  4. $5a+2x$.
5. $4x+3b$.  6. $5y+7d$.  7. $12a+7y$.  8. $9c+10z$.
9. $ab+cd$.  10. $2bc+3cd$.  11. $5xy+pq$.  12. $3abc+4xyz$.
13. $5a$.  14. $15a$.  15. $9b$.  16. $18c$.
17. $14x$.  18. $20y$.  19. $20z$.  20. $30p$.
21. $10ab$.  22. $18xy$.  23. $40zx$.  24. $30pq$.
25. $16abc$.  26. $8xyz$.  27. $40a^2$.  28. $40x^2y^2$.
29. $50a$.  30. $64a^2$.  31. $30ab$.  32. $28xy$.
33. $\frac{13}{12}a^2$.  34. $3xy$.

## প্রশ্নমালা 9. ( পৃঃ 24-25 )

1. $a+b+c+d$.  2. $a+b+x+y$.  3. $x+y+p+q$.
4. $2a+3b+3c+4d$.  5. $2a+6b+3x+5y$.
6. $2p+q+4m+8n$.  7. $x+2y+a+b+3$.
8. $p+2q+3x+4y+7$.  9. $5a+7b+6x+7y+4$.
10. $11a+11b$.  11. $11a+20b$.
12. $13a+13b$.  13. $28a+30b$.
14. $10a+13b+17c$.  15. $15a+14b+12c$.
16. $32a+52b+47c$.  17. $13x+13y+16z$.
18. $23x+26y+29z$.  19. $51x+38y+67z$.
20. $12a^2+14b^2+25c^2$.  21. $19xy+12yz+16zx$.
22. $19p^2+17q^3+27r^4$.  23. $\frac{9}{8}a+\frac{11}{6}b+\frac{15}{8}c$.
24. $\frac{28}{15}x+\frac{23}{12}y+2z$.  25. $(a+p)x+(b+q)y+(c+r)z$.
26. $15a+10b+9c$.  27. $25a+16b+15c$.
28. $20x+15y+22z$.  29. $11a^2+13ab+16b^2$.
30. $13p^2+19q^3+16r^5$.  31. $6b^3+19c^3+10d^4$
32. 240.  33. $8x+11y+14z$.

## প্রশ্নমালা 10. ( পৃঃ 27-28 )

1. $a-c$. 2. $2a-3b$. 3. $5c-4d$. 4. $7x-9y$.
5. $2p-5q$. 6. $9d-4a$. 7. $a+b+c-x-y-z$.
8. $2p+3q+7r-2a-3b$. 9. $10a$. 10. $5b$.
11. $3c$. 12. $13x$. 13. $6a^2$. 14. $6ab$.
15. $17p^2$. 16. $5abc$. 17. $10a^2bc$. 18. $2a+5b$.
19. $8a+b$. 20. $7b+6c$. 21. $5x+4y$. 22. $5x+6y$.
23. $5ab+6cd$. 24. $2x^2+11y^2$. 25. $11a+7b+4c$.
26. $6b+15c$. 27. $8a^2+2b^2+4c^2$. 28. $4x^3+4x^2+4x$.
29. $18ab$. 30. $3a+10b+6c-2d$. 31. $12a^2+4b^2+3c^2$.
32. $5x+15y+14z-p$. 33. $4a+4b$.
34. $11x+15y$. 35. $14x+10y+7z$.

## প্রশ্নমালা 11. ( পৃঃ 32 )

1. $a^{12}$. 2. $x^{15}$. 3. $14a^7b^4$.
4. $50a^{15}b^{15}$. 5. $24a^5b^7c^9$. 6. $96x^9y^5$.
7. $72x^8y^8$. 8. $35a^3x^7$. 9. $56m^5n^5$.
10. $180m^3n^{17}$. 11. $99p^7q^{11}$. 12. $120x^{12}y^{12}z^{12}$.
13. $30a^{12}b^{12}c^2$ 14. $72a^2b^5c^7d^3$
15. $2a^5b^7c^{12}$. [ প্রশ্নে $c^3$ স্থলে $c^8$ হইবে। ]
16. $105x^5y^7z^{10}p$. 17. $60a^6b^6$. 18. $24a^3b^3c^3$.
19. $210a^9b^8$. 20. $60a^{19}b^{20}$. 21. $120x^8y^{12}$.
22. $300x^{12}y^{21}$. 23. $72abcdxy$.
24. $735a^9b^8c^8$. 25. $30a^5b^7c^5d^6$.

## প্রশ্নমালা 12. ( পৃঃ 33-34 )

1 $ac+bc$. 2. $bd+cd$. 3. $xz+yz$.
4. $pr+qr$. 5. $3ac+3bc$. 6. $4ac+12bc$.
7. $6xz+9yz$. 8. $15pr+25qr$. 9. $6a^2b+15ab^2$.
10. $14a^3b^2+4a^2b^3$. 11. $5a^3b^2+5a^2b^3+5ab^4$.
12. $3ab^2c^2+3a^2bc^2+3a^2b^2c$. 13. $7a^4b+7a^3b^2+21abc$.
14. $6a^5b+24a^3b^3+6ab^5$. 15. $6x^3y+15x^2y^2+27xy^3$.
16. $14x^4y^2z^2+10x^2y^4z^2+6x^3y^3z^3$.
17. $10abx^4y+4a^2b^2x^2y^2+12abxy^4$. 18. $9p^3q+45p^2q^2+9pq^3$.
19. $14ax+8bx$. 20. $11abx+28aby$.

## প্রশ্নমালা 13. ( পৃ: 36-37 )

1. $a^2+5a+6$. 2. $a^2+9a+20$. 3. $2a^2+7a+3$.
4. $6a^2+7a+2$. 5. $2x^2+11x+5$. 6. $2x^2+17x+21$.
7. $3x^2+11x+6$. 8. $10x^2+33x+20$. 9. $6a^2+13ab+6b^2$.
10. $4a^2+19ab+12b^2$. 11. $2a^3+7a^2b+5ab^2+b^3$.
12. $2x^3+3x^2+7x+3$. 13. $4x^3+16x^2+23x+12$.
14. $x^3+4x^2y+4xy^2+y^3$. 15. $10x^3+27x^2y+32xy^2+21y^3$.
16. $6p^3+5p^2q+3pq^2+q^3$. 17. $9a^2+12ab+4b^2$.
18. $4a^2+20ab+25b^2$. 19. $a^2+14ab+49b^2$.
20. $x^2+4xy+4y^2$. 21. $9x^2+30xy+25y^2$.
22. $p^2+6pq+9q^2$. 23. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.
24. $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$.
25. $p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp$.
26. $xy+y^2+zx+yz$. 27. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$.
28. $a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$.
29. $3x^3+8x^2+9x+10$. 30. $3a^6+11a^4+12a^2+4$.

## প্রশ্নমালা 14. ( পৃ: 39-40 )

1. $a^2b^2$. 2. $a^2b^5$. 3. $a^3b^2$. 4. $3a^2b^2$.
5. $5a^7b^3$. 6. $12a^2b^2c^2$. 7. $2x^4y^5$. 8. $4xy$.
9. $7x^2y^2z^2$. 10. 7. 11. $5z^2$. 12. $27xyz$.
13. $7a^3b^3x$. 14. $7a^3b^7x^3y$.
15. $8p^5q^5r^5$. 16. $16m^5n^5p^5$. 17. $\frac{1}{2}a^3x^4p^4$. 18. $\frac{1}{3}abc$.

## প্রশ্নমালা 15. ( পৃ: 40-41 )

1. $x+2y$. 2. $2xy+3x^2y^2$. 3. $a^2b^3+2ab^4$.
4. $2a^2x^3+3ax^2$. 5. $a+b+c$.
6. $a^2b^2+2ab+3$.
7. $3a^2b^3c^4+4a^3b^2c^4+7a^4bc^2$. 8. $3x^2+4y^2+z^2$.
9. $3p^2q^4r^6+4pq^5r^7+6q^6r^8$. 10. $amn^2+2bm^2n^3+3cm^3n^4$.
11. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2+c^2$. 12. $\frac{1}{3}b^3c^4+ab^4c^5+3a^2b^5c^6$.

## প্রশ্নমালা 16. ( পৃ: 43 )

1. $x+3$. 2. $x+1$. 3. $x+3$.
4. $x+4$. 5. $x+3$. 6. $x+6$.

7. $3x+1$. 8. $3x+2$. 9. $2x+5$.
10. $3x+2$. 11. $x^2+2x+1$. 12. $2x^2+x+3$.
13. $5a+6b$. 14. $9a+2b$. 15. $3x^2+5x+6$.
16. $5a^2+b+7$. 17. $3x+4$. 18. $2a+5$.
19. $2x+3y$. 20. $2x+5$.

## প্রশ্নমালা 17. ( পৃঃ 47 )

1. +20 টাকা, −20 টাকা। 2. +100 কি.মি., −100 কি.মি.।
3. 12 টা + 10 মিনিট, 12 টা − 10 মিনিট। 4. $+8°$, $-8°$.
5. +30 টাকা, −30 টাকা। 6. +1000 মিটার, −1000 মিটার।
7. $+10°$, $-10°$. 8. $-x$ টাকা।
9. $+3x$ টাকা লাভ। 10. +1000 মিটার উচ্চে।

## প্রশ্নমালা 19. ( পৃঃ 52 )

1. 72. 2. −35. 3. −24. 4. 70.
5. −24. 6. 90. 7. 3. 8. −3.
9. −3. 10. 3. 11. −6. 12. −16.
13. −64. 14. 81. 15. −432. 16. −18, −54, −324, 0.

## প্রশ্নমালা 20. ( পৃঃ 55 )

1. $3a+2b+5c$. 2. $7a-4b+9c$. 3. $8x-9y-7z$.
4. $27a$. 5. $24ab$. 6. $27xyz$.
7. $40abc$. 8. $20x^2yz$. 9. $31p^2q^3$.
10. $10a$. 11. $ab$. 12. $-20abc$.
13. $-10x^2yz$. 14. $-15axy$. 15. $-25x^2y^2$.
16. $-9a^2b$.

## প্রশ্নমালা 21. ( পৃঃ 56-57 )

1. $2a$. 2. $2b$. 3. $2ab$.
4. $3a+b+c$. 5. 0. 6. $3x^2+y^2+z^2$.
7. $-6a+2b-9c$. 8. $a+10b-10c$. 9. $24a^2-5c^2$.
10. $3p+5q+7r$. 11. $6x^3+6x+1$. 12. $-3y^3-5y^2-6y$.
13. $4a^3+2a^2b+3ab^2+b^3$. 14. $a^2$.
15. $4x^4+7x^3$. 16. $b^3+b^2+b+1$.

17. $5a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c.$
18. $\frac{15}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{5}{12}c^2.$
19. $\frac{11}{6}x^3+\frac{13}{12}x^2+\frac{47}{60}x.$
20. $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z.$
21. $3z.$
23. $0.$
25. $39x-13y.$
26. $40x+21y.$
27. $12x+11y+21z.$
28. $(12x+8y+2z)$ টাকা।
29. $(11x+2y)$ কিলোমিটার।
30. $(4x+7y+3z)$ টাকা।

## প্রশ্নমালা 22. ( পৃঃ 60-61 )

1. $2a+b-c.$
2. $-a-b+3c.$
3. $x+y+z.$
4. $2x^2+y^2-z^2.$
5. $3a^2+c^2.$
6. $x^3-x+4.$
7. $a^2+7ab-3b^2+5.$
8. $9x^2+2y^2-5z^2.$
9. $2x^2y.$
10. $x^4-7x^3+13x^2-3x-5.$
11. $3ab-2bc+7ca+12.$
12. $-2x^3y^3-10x^2y^2+14xy-1$
13. $9a-2x-7y+6b.$
14. $4px^3+3qx^2-3rx-10.$
15. $abx^2-8bcy^2+10caz^2+abc.$
16. $-\frac{2}{7}a^2-\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{2}c^2+5.$
17. $\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{12}y^2+\frac{3}{4}z^2+p-q.$ [ প্রশ্নে, দ্বিতীয় রাশিতে $x^2$ স্থলে $\frac{1}{2}x^2$ হইবে। ]
18. $a^2+b^2.$
19. $x^3+2x^2-x+8.$
20. $6a^2b-3ab^2.$
21. $a+b-6c.$
22. $3x+6y+9z.$
23. $4a^2+3bc+2b^2.$
24. $-4x-y+4z.$
25. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z.$
26. $5a^4-7b^3+3c^2-1.$
27. $x^2-y^2+3z^2.$
28. $-x^3+x^2+1.$
29. $3x+4y-9z.$
30. $2x+3z.$
31. A, $(2x+y+7)$ টাকা এবং B, $(3x+3)$ টাকা।
32. 20000.

## প্রশ্নমালা 23. ( পৃঃ 64 )

1. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$
2. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$
3. $a^3-b^3.$
4. $a^3+b^3.$
5. $a^4+a^2b^2+b^4.$
6. $x^4+x^2+1.$
7. $9x^4+5x^2y^2+y^4.$
8. $10x^4-9x^3y-3xy^3+2y^4.$ [ প্রশ্নে, $2x^3$ স্থলে $2x^2$ হইবে ]
9. $15a^4-14a^3b+25a^2b^2-10ab^3+8b^4.$
10. $a^8+a^4+1.$
11. $2x^2-12y^2+20z^2+2xy+13zx-yz.$
12. $6x^6+3x^5-4x^4-x^3+5x^2+6x-15.$

13. $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$.
14. $a^3 - a^2 + 3a + 2a^2b - 2ab + 6b$.
15. $2a^6 + 2a^5b^2 + 2a^3b^3 - a^3b^2 - a^2b^4 - b^5$.
16. $2a^5 - 2a^4b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + 2a^2b^4 - 2b^5$.
17. $1 + x^2 - x^4 - x^6$.
18. $x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$.
19. $108a^6b^6c^3$. 20. $x^3 - a^3$. 21. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
22. $x^3 + x^2 - 14x - 24$. 23. $a^8 + a^4b^4 + b^8$.
24. $a^6 - x^6$. 25. $a^6 - b^6$.
26. 0. 27. $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$.

## প্রশ্নমালা 24. ( পৃ: 67-68 )

1. $-3a^2bc$ ; $3a^3b^2$ ; $-3x^2y^5$. 2. $2a^2b^4c^6 - 4abc - 6c^4$.
3. $4y^2 + x - 2x^2y + 3x^3y^3$. 4. $-4a^2b^2c + 6abc^2 + 3c^6 + 2c$
5. $2x^3 - 6x^2 + 10a$. 6. $2x^3 - \frac{9}{4}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + 3y^3$.
7. $x^2 - 2xy + 2y^2$. 8. $x^2 - 2y^2$.
9. $a^2 - 6ab + 8b^2$. 10. $x^2 - 4x - 2$.
11. $2x + 3y - 5z$. 12. $a^2 - a - 3 + 2b$.
13. $x^2 - 2ax + a^2$.
14. $a^2 + a + 1$. 15. $7x^2 - 7xy + 5y^2$.
16. $a^7 - a^6x + a^5x^2 - a^4x^3 + a^3x^4 - a^2x^5 + ax^6 - x^7$.
17. $1 - 5a + a^2$. 18. $2x^2 - 3x + 1$.
19. $x + a$. 20. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

## প্রশ্নমালা 25. (পৃ: 70 )

1. $2b$. 2. $a - b - c + d$. 3. $x + y + z$.
4. 0. 5. $2ac - 2ad$. 6. $3x - 3y$.
7. $2x + 3z$. 8. $2a$. 9. $b - c$.
10. $2d - 2c - 2b$. 11. $15x$. 12. $3z$.
13. $2a$. 14. $x + 3y - 3z$. 15. $-2p + 4q$.

## প্রশ্নমালা 26. ( পৃ: 73 )

1. $a^2 + 4ab + 4b^2$. 2. $4a^2 + 4ab + b^2$.
3. $x^2 + 4xy + 4y^2$. 4. $4x^2 + 4xy + y^2$.

5. $4a^2+12ab+9b^2$.
6. $25a^2+20ab+4b^2$.
7. $36x^2+12xy+y^2$.
8. $64x^2+48xy+9y^2$.
9. $a^4+4a^2b^2+4b^4$.
10. $9a^4+12a^2b^2+4b^4$.
11. $25x^2+30ax+9a^2$.
12. $9y^4+30b^2y^2+25b^4$
13. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$.
14. $\frac{1}{p^2}+\frac{4}{pq}+\frac{4}{q^2}$.
15. $4x^2y^2+4abxy+a^2b^2$.
16. $9a^2+4+\frac{4}{9a^2}$.
17. $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.
18. $4x^2+y^2+9z^2+4xy+6yz+12zx$.
19. $(a+3)^2$.
20. $(2x+1)^2$
21. $(3x+1)^2$
22. $(5+a)^2$.
23. $(p+2q)^2$
24. $(4a+5b)^2$
25. $(3x+5y)^2$.
26. $(6a^2+4b^2)^2$
27. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$.
28. $\left(x+\frac{2a}{3}\right)^2$.
29. $(2x+\frac{1}{2})^2$.
30. $\left(3x+\frac{1}{3x}\right)^2$.
31. 225, 169, 625, 4356.
32. 3721, 93025, 1002001, 1476225
33. 8100.
34. 10000.
35. 100.

## প্রশ্নমালা 27. ( পৃঃ 76-77 )

1. $a^2-2ax+x^2$.
2. $4a^2-4ab+b^2$.
3. $4b^2-4ab+a^2$.
4. $9x^2-6xy+y^2$.
5. $9a^2-12ab+4b^2$.
6. $a^2b^2-2abcd+c^2d^2$.
7. $x^2y^2-2bcxy+b^2c^2$.
8. $16x^2-40xy+25y^2$.
9. $4a^4-12a^2b^2+9b^4$.
10. $a^2-2+\frac{1}{a^2}$.
11. $9x^2-2+\frac{1}{9x^2}$.
12. $p^8-4p^4q^2+4q^4$.
13. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$.
14. $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz$.
15. $(2a-1)^2$.
16. $(2x-2)^2$.
17. $(3a-b)^2$.
18. $(x^2-y^2)^2$.
19. $(5x-3y)^2$.
20. $(4a^2-1)^2$.
21. $(6ab-x)^2$.
22. $\left(3p-\frac{1}{3p}\right)^2$.
23. $(2a-\frac{1}{2})^2$.
24. $(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y)^2$.
25. 1.
26. 25.
27. 0.
28. 625, 6084, 636804, 1432809

29. $4b^2$. 30. $36b^2$. 31. $4c^2$.
32. $9y^2-12xy+4x^2$. 33. 1. 34. 12. 35 2.
38. 11. 40. 4. 41. 34, 706. 43. 80.

প্রশ্নমালা 28. ( পৃ: 79 )

1. $a^2-1$. 2. $x^2-a^2$. 3. $25a^2-36b^2$.
4. $25a^2-y^2$. 5. $a^4-4x^2$. 6. $a^2b^2-a^2c^2$.
7. $a^6-b^2c^2$. 8. $a^6-b^6$. 9. $x^2-\frac{1}{4}y^2$.
10. $4m^4-9n^4$. 11. $4a^2c^2-b^2d^2$ 12. $a^2-b^2-2bc-c^2$.
13. $a^4-b^4$. 14. $x^4-y^4$. 15. $a^4-16b^4$.
16. $1-x^4$. 17. 14480. 18. 1739600.
19. 11447000. 20. 159424. 21. 1439744.
22. 6249375. 23. $x^2+2xy+y^2-z^2$. 24. $x^2-y^2+2yz-z^2$.
25. $4x^2-12xz+9z^2-9y^2$. 26. $x^4+x^2+1$.
27. $x^4+4y^4$. 28. $x^8+x^4y^4+y^8$.
29. $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.
30. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac-d^2$. 31. $(2a+3b)(2a-3b)$.
32. $(ab+cd)(ab-cd)$. 33. $(3a+2b-c)(3a-2b+c)$.

প্রশ্নমালা 29. ( পৃ: 86—87)

1. 5. 2. 4. 3. 6. 4. 6. 5. $2\frac{1}{6}$. 6. $3\frac{1}{3}$.
7. 30. 8. 15. 9. 4. 10. 3. 11. $3\frac{1}{2}$. 12. 2.
13. 14. 14. 30. 15. 40. 16. 4200 টাকা। 17. 60. 18. 10000.

প্রশ্নমালা 30. ( পৃ: 89-90 )

1. 2. 2. 3. 3. 6. 4. 3.
5. 4. 6. 7. 7. 4. 8. 3. 9. 3. 10. 3.
11. 10. 12. 5. 13. $\frac{1}{4}$. 14. $4\frac{3}{5}$. 15. $10\frac{2}{3}$. 16. 10.
17. 2. 18. 30. 19. 540. 20. 15 বৎসর।

প্রশ্নমালা 31. ( পৃ: 91-92)

1. 2. 2. 8. 3. 3. 4. 5. 5. 6. 6. 4.
7. 0. 8. 9. 9. 4. 10. 4. 11. 3. 12. 1.
13. 5. 14. 5. 15. 2. 16. 1. 17. 60 এবং 40.
18. 13, 6.

প্রশ্নমালা 32. ( পৃ: 94 )

1. −3 2. 3. 3. 4. 4. 3. 5. 2. 6. 3.
7. $4\frac{1}{3}$. 8. 4. 9. 15. 10. 1. 11. 2. 12. 6.
13. 6. 14. 20. 15. 12. 16. 12. 17. 42. 18. 12.

19. 12. 20. $3\frac{3}{4}$. 21. 7. 22. 24. 23. 4. 24. 7. 25. 1.

**প্রশ্নমালা 33.** ( পৃঃ 95-97 )

1. 17 এবং 13. 2. 55 এবং 45. 3. 100 বালক, 30 বালিকা।
4. পিতার 48 বৎসর, পুত্রের 16 বৎসর। 5. 128 কিলোমিটার। 6. 60.
7. 40. 8. পুরুষ 5 টাকা, স্ত্রীলোক 3 টাকা। 9. 6 দিন।
10. 20, 21, 22. 11. 28. 12. 9. 13. 12 এবং 13.
14. 8 এবং 12. 15. A 30 টাকা, B 20 টাকা, C 50 টাকা।
16. 30 টাকা, 20 আধুলি। 17. 15 মিটার। 18. 12 মিটার।
19. 32 কিলোমিটার এবং 48 কিলোমিটার। 20. 30 বৎসর। 21. 51 টাকা।

**বিবিধ প্রশ্ন (1)** ( পৃঃ 103-107 )

1. $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b}$.
2. প্রথম বালকের 12 পয়সা আছে এবং দ্বিতীয় বালকের 12 পয়সা ধার আছে।
3. $2y-z$. 4. $-2x+3y+z$. 5. 1. 6. $3600x+60y+z$
7. $-5a^2b^2c^2$. 9. 5. 10. $4a^2$.
11. $2x^3$ এবং $8x^3$ ; 6000 12. $\frac{x^2}{100}$. 13. $a^3+8a$.
14. $3ab-3b$. 15. $27x^3+1$.
16. $x+1$. 17. (*i*) $a^2+2a+1$, (*ii*) $25x^2-36$.
18. 4. 20. 0. 21. $3a^2, 5ac$.
22. (*i*) 1, (*ii*) 81, (*iii*) 1, (*iv*) 2. 23. (*i*) 0, (*ii*) $a-1$
24. (*i*) $x-3y+2z$, (*ii*) $-2x+3y+6z$. 25. 0.
26. $x^2-2xy+2y^2$.
27. (*i*) $4x^2+4x+1$, (*ii*) $4x^2-4x+1$, (*iii*) $4x^2-1$, (*iv*) $1-9a^2$.
28. $a^3-2a^2b+3ab^2-b^3$ ; $-b^3+3ab^2-2a^2b+a^3$.
29. 34. 30. 16. 31. 1000. 32. $a+3b+3c$.
33. $2a^2+2b^2$. 34. $2a^3-2b^3$. 35. 0.
36. 2. 37. $100x+10y+z$. 38. $\frac{yz}{x}$.
39. 100. 40. $p^2+2$. 42. $a$.
43. $-2a^2-b^2+4c^2$. 44. $8x^3+1$. 45. $2x-5$.
46. (*i*) $4a^2+12ab+9b^2$, (*ii*) $4a^2-12ab+9b^2$.
(*iii*) $4a^2-9b^2$. (*iv*) $9x^2-25y^2$. 47. $x+1$ এবং $x+2$.

48. 7. 49. $(2x+3y)(2x-3y)$. 50. 64 ; 8.
51. 240, 192. 52. 45. 53. $a^2+b^2$.
54. $\frac{1}{2}a^2+\frac{4}{3}b^2+\frac{3}{4}c^2$. 55. $a-2b+2c$. 56. $a^4-16b^4$.
57. $9x^4+3x^2+1$. 58. 0. 59. $16y^2$.
60. 7. 61. 18. 62. $9x-3y-3z$. 63. $\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}y+\frac{1}{4}z$.
64. $6x^3-x^2-18x+5$. 65. $4x^2-12xy+9y^2$.
66. $1000x+100y+10z$. 67. $2b$ টাকা।
68. 5. 69. 16 এবং 25. 70. 6. 71. $4c^2$.
72. $m^2+2$. 73. 3. 74. $a+3b+2d$. 75. $a^2+b^2+c^2$.
76. $6x^2-13xy+6y^2$. 77. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$.
78. (*i*) $4x^2+12x+9$, (*ii*) $9a^4-30a^2b^2+25b^4$. 79. 9. 80. 8.
81. $a-x-y$. 82. পুত্রের বয়স 12 বৎসর, পিতার বয়স 36 বৎসর।
83. 0. 84. 47.

## প্রশ্নমালা 35. ( পৃ: 111-113 )

1. $a^3+2ab-ab^2+b-1$. 2. $4x^4+81$.
3. $-5+8a+9a^2-8a^3+11a^4-9a^5-6a^6$.
4. $8x^3-27y^3+z^3+18xyz$. 5. $a^3-125b^3-8c^3-30abc$.
6. $a^{12}+4a^6-1$. 7. $a^3+b^3+c^3-3abc$.
8. $a^6-2a^3+1$. 9. $1+x^2+x^4+x^6+x^8$.
10. $a^4b-a^3bc-a^3c^2-a^2b^3+a^2c^3+ab^3c^2+ab^3c-b^2c^3$.
11. $a^3-\frac{25}{24}a^2+\frac{3}{4}a-\frac{3}{16}$. 12. $x^3-x^2-\frac{34}{9}x+\frac{4}{3}$.
13. $\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{36}x^2+\frac{1}{72}x+\frac{1}{48}$.
14. $\frac{1}{3}a^4-\frac{11}{12}a^3b+\frac{41}{8}a^2b^2-\frac{23}{4}ab^3+6b^4$.
15. $x^5-\frac{5}{6}x^4+2x^3+\frac{79}{60}x^2+\frac{13}{20}x+1$.
16. $1+x^4+x^8$. 17. $x^8-1$. 18. $x^8-256y^8$. 19. $x^{12}-a^{12}$.
20. $a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2-a^3-b^3-c^3-2abc$.
21. $\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{81}b^4$. 22. $\frac{1}{64}a^6-b^6$.
23. $apx^3+(bp+aq)x^2+(cp+bq)x+cq$.
24. $x^4+(b-p)x^3+(c-bp+q)x^2+(bq-cp)x+cq$.
25. $apx^6+(aq-bp)x^4+(cp-ar)x^3-bqx^2+(cq+br)x-cr$.
26. $amx^5+(an-bm)x^4+(ap-bn+cm)x^3+(aq-bp+cn)x^2$
$+(cp-bq)x+cq$.

27. $x^4+\{2-(a+b)^2\}x^2+1.$

28. $(a+b)^2px^3+\{cp+(a+b)^2\}x^2+(dp+c)x+d.$

29. $x.$ 30. $x^{\frac{4}{5}}.$ 31. $x^{\frac{3}{2}}.$ 32. $a^{-1}.$ 33. $a^{-1}.$

34. $a.$ 35. $6x^{\frac{5}{6}}.$ 36. $10x.$ 37. $10x^2.$ 38. $\frac{1}{10}x.$

39. $\frac{2}{15}x^{\frac{1}{2}}.$ 40. $\frac{1}{10}x^{-\frac{7}{2}}.$ 41. $x-y.$ 42. $a+1.$

43. $x^{-1}-y^{-1}.$ [ প্রশ্নে, $x^{\frac{1}{2}}$ স্থলে $x^{-\frac{1}{2}}$ হইবে ]

44. $x^3+y^{-3}.$ 45. 5. 46. 46.

## প্রশ্নমালা 36. ( পৃ: 114-115 )

1. $2x^4-3x^3-5x^2+8x+3.$
2. $3x^5-5x^4+13x^3-5x^2+6x+8.$
3. $2x^5+x^4+2x^3-11x^2+2x+4.$ 4. $4x^4+81.$
5. $3x^5+14x^4+22x^3+28x^2+23x+6.$
6. $6x^5-25x^4+12x^3+10x^2+31x+10.$
7. $x^7+4x^5-4x^4+7x^3-8x^2+x+3.$
8. $x^7+2x^6-4x^5-5x^4-7x^3+25x^2-14x+4.$
9. $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5.$
10. $2a^4-7a^3b-11ab^3-20b^4.$

## প্রশ্নমালা 37. ( পৃ: 118-119 )

1. $x^2-x+1.$ 2. $a^4-a^2+a.$
3. $x^4+2x^3+3x^2+4x+5.$ 4. $x^2+y^2+a^2.$
5. $a^8-a^6+2a^4+a^2+1.$
6. $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc.$
7. $4x^2+y^2+9z^2+2xy-3yz+6zx.$
8. $a^2+3ab-5b^2.$ 9. $x^3-5x+3.$
10. $x^4+y^4+1-x^2y^2+x^2+y^2.$
11. $x^8-2x^6y^2+3x^4y^4-2x^2y^6+y^8.$
12. $a^7-a^6b+a^4b^3-a^3b^4+ab^6-b^7.$ 13. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y.$
14. $\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}b^2.$ 15. $\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2.$
16. $px^2+qx+r.$ 17. $px-q.$ 18. $px-q.$ 19. $x^2.$
20. $x^{\frac{3}{2}}.$ 21. $2x^{\frac{1}{6}}.$ 22. $x.$ 23. $x^{-2}.$
24. $2x^{\frac{1}{2}}.$ [প্রশ্নে '+' স্থলে '÷' হইবে] 25. $a^{\frac{1}{3}}.$ 26. $a.$ 27. $ab^{-\frac{2}{3}}.$

**28.** $1-2a^{\frac{1}{3}}+7a^{\frac{2}{3}}$. **29.** $4a^{\frac{1}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}}$. **30.** $a^{\frac{1}{3}}-2$.
**31.** $2x^3-2x^2-2x-5$. **32.** $x^2+x-2$. **33.** $x^2-2x+3$.
**34.** $2a^4-5a^3-4a^2+a+2$. **35.** $a^4+2a^3+3a^2+4a+5$.
**36.** $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$.

## প্রশ্নমালা 38. ( পৃ: 123-124 )

**1.** $1+6x+12x^2+8x^3$. **2.** $125x^3+150x^2+60x+8$.
**3.** $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$. **4.** $64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$.
**5.** $8a^6+36a^4b^2+54a^2b^4+27b^6$.
**6.** $a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$.
**7.** $a^3x^6+3a^4x^5+3a^5x^4+a^6x^3$.
**8.** $p^3x^6+3p^2qx^4+3pq^2x^2+q^3$. **9.** $x^9+15x^6y^2+75x^3y^4+125y^6$.
**10.** $a^3b^6+3a^2b^5c+3ab^4c^2+b^3c^3$.
**11.** $125a^3x^3+150a^2bx^2y+60ab^2xy^2+8b^3y^3$.
**12.** $64a^9+240a^6b^2+300a^3b^4+125b^6$.
**13.** $8a^3+b^3+c^3+12a^2b+6ab^2+3b^2c+3bc^2+6c^2a$
$+12ca^2+12abc$.
**14.** $a^6+b^3c^3+d^3+3a^4bc+3a^2b^2c^2+3b^2c^2d+3bcd^2+3a^2d^2$
$+3a^4d+6a^2bcd$.
**15.** $8x^3+27y^3+125z^3+36x^2y+54xy^2+135y^2z+225yz^2$
$+150z^2x+60zx^2+180xyz$.
**16.** $a^6+b^6+8c^6+3a^4b^2+3a^2b^4+6b^4c^2+12b^2c^4+12c^4a^2$
$+6c^2a^4+12a^2b^2c^2$.
**17.** (*i*) 91125. (*ii*) 421875. (*iii*) 8615125.
**18.** $8a^3x^3$. **19.** $8x^6$. **20.** $8b^3$.
**21.** $512y^3$. **22.** $8(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)$.
**23.** 1. **24.** 125. **25.** (*i*) 64. (*ii*) 67.
**26.** (*i*) 65. (*ii*) 152. (*iii*) 217. (*iv*) 72.
**28.** 18. **32.** 28. **33.** 10. **34.** 9.

## প্রশ্নমালা 39. ( পৃ: 128-129 )

**1.** $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$. **2.** $1-9x+27x^2-27x^3$.
**3.** $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

4 $8a^6-60a^4b^3+150a^2b^4-125b^6$.
5. $27x^9-135x^6+225x^3-125$.
6. $8a^9-60a^6b^3+150a^3b^4-125b^6$.
7. $a^6-3a^4bc+3a^2b^2c^2-b^3c^3$. 8. $125x^3-225x^4+135x^5-27x^6$
9. $a^3b^6-3a^4b^5+3a^5b^4-a^6b^3$.
10. $a^3+b^3-c^3+3a^2b+3ab^2-3a^2c+3ac^2-3b^2c+3bc^2-6abc$.
11. $8a^3-27b^3-1-36a^2b+54ab^2-12a^2+6a-27b^2-9b+36ab$.
12. $a^6+b^3c^3-27d^3+3a^4bc-9a^4d+3a^2b^2c^2+27a^2d^2-9b^2c^2d$
$+27bcd^2-18a^2bcd$.
13. 704969. 14. 122763473. 15. 25672375.
16. $27a^3$. 17. $64q^3$. 18. $512y^3$.
19. $8b^3+24b^2c+24bc^2+8c^3$. 20. $64a^3$.
21. ·125. 22. ·001. 23. 729.
24. 20. 25. (*i*) 7. (*ii*) 117. (*iii*) 152. (*iv*) 124.
26. 14. [ প্রশ্নে, $x^8$ স্থলে $x^3$ হইবে ]
27. $m^3+3m$. [ প্রশ্নে, $-\frac{1}{x}$ স্থলে $x-\frac{1}{x}$ হইবে ]
28. 1000. 30. $c^3$. 31. 3. 32. 60.

## প্রশ্নমালা 40. ( পৃঃ 130 )

1. $125x^3+1$. 2. $27a^3+64b^3$. 3. $a^3b^3+64$.
4. $1000x^3+27y^3$. 5. $a^6+1$.
6. $a^6b^3+216$. 7. $a^3b^3+b^3c^3$. 8. $a^9+125b^{18}$. 9. $a^6-b^6$.
10. $x^9+y^9$. 11. $53x^3+64y^3$. 12. $6a^3-8b^3$.
13. $(3x+4)(9x^2-12x+16)$. 14. $(1+ab)(1-ab+a^2b^2)$.
15. $(7x+2y)(49x^2-14xy+4y^2)$.
16. $(5a+6b)(25a^2-30ab+36b^2)$.
17. $(10a^2+9b^2)(100a^4-90a^2b^2+81b^4)$.

## প্রশ্নমালা 41. ( পৃঃ 132 )

1. $x^6-1$. 2. $64a^6-1$. 3. $8a^6-27b^6$.
4. $125x^3-27y^3$. 5. $27x^3y^3-64z^3$. 6. $1000a^9-27$.
7. $a^9-b^9$. 8. $x^{18}-y^{18}$. 9. 0. 10. 0.
11. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$.
12. $(5x-4y)(25x^2+20xy+16y^2)$.
13. $(6-5a)(36+30a+25a^2)$. 14. $(ab-c)(a^2b^2+abc+c^2)$.
15. $(2a+1)(4a^2-2a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)$.
16. $(10-a^2b^2)(100+10a^2b^2+a^4b^4)$.

## প্রশ্নমালা 42. ( পৃঃ 133 )

1. $x^2+4x+3$. 2. $x^2+17x+70$. 3. $x^2+16x+63$.
4. $a^2-7a+12$. 5. $a^2-13a+40$.
6. $a^2+9a-10$. 7. $a^2-7a-60$. 8. $a^2-7a-450$.
9. $a^2-a-110$. 10. $x^4-2x^2-35$. 11. $a^6+a^3-72$.
12. $a^4b^4-6a^2b^2-7$. 13. $9x^2+36x+20$. 14. $25x^4-20x^2-320$.
15. $25a^6-65a^3+30$. 16. $a^2x^4-3ax^2-130$.

## প্রশ্নমালা 43. ( পৃঃ 134 )

1. $x^3+12x^2+47x+60$. 2. $x^3+9x^2+23x+15$.
3. $x^3+13x^2+52x+60$. 4. $x^3+4x^2-11x-30$.
5. $x^3-7x+6$. 6. $x^3-5x^2-44x-60$.
7. $x^3-6x^2+11x-6$. 8. $x^3-12x^2+44x-48$.
9. $8x^3+44x^2+62x+21$. 10. $27a^6+90a^4+87a^2+20$.
11. $64x^3+16x^2-68x+15$. 12. $27x^6-126x^4+159x^2-40$.
13. $125x^3-425x^2+410x-120$. 14. $27x^9-90x^6+87x^3-20$.

## প্রশ্নমালা 44. ( পৃঃ 137 )

1. $5(x+2y)$. 2. $b(a+c)$. 3. $x(2x-3y)$.
4. $a^2b^2(a-b)$. 5. $6a^2b^2(3ac+7bd)$. 6. $4a^3(a-1)$.
7. $ab(a-b-c)$. 8. $a^2b^2c(a-b-c)$.
9. $7ab(6a-7b+10c)$
10. $(a-b)(x-y)$. 11. $(x-y)(a+b+c)$.
12. $(x^2+y^2)(a+b-c-d)$. 13. $(x-y)(a^2+b^2+1)$.
14. $(b+c+d)(x+y+z)$. 15. $(a-b)^2(2x+3y-z)$.
16. $2(x+y)(a+b+c)$. 17. $(x+1)(x^2+1)$.
18. $(x-1)(2x^2-1)$. 19. $x^2(x+1)(x^2+1)$.
20. $(a+b+c)(x+y+z)$. 21. $(x+y)(3x+3y+5a+5b)$.

## প্রশ্নমালা 45. ( পৃঃ 138 )

1. $(2a+1)^2$. 2. $(x-15)^2$. 3. $(5x-4y)^2$.
4. $4(5-4a^2)^2$. 5. $4(3a^2+5)^2$.
6. $(5ab-c)^2$. 7. $(9a^3+5)^2$. 8. $(7a^2-150b^2)^2$.
9. $(a+b+3)^2$. 10. $(a+b)^4$. 11. $(2a-2b-3c)^2$.
12. $\{(a-b)x^2-4(a+b)y^2\}^2$.

## প্রশ্নমালা 46. ( পৃঃ 139-140 )

1. $(a+3b)(a-3b)$.
2. $(2x+5y)(2x-5y)$.
3. $(ab+7c)(ab-7c)$.
4. $(11+9a)(11-9a)$.
5. $(8x+13y)(8x-13y)$.
6. $(25+3a^2)(25-3a^2)$.
7. $15a^2(a+3b)(a-3b)$.
8. $2a(a+4b^2)(a-4b^2)$.
9. $(25x^2+y)(25x^2-y)$.
10. $9(2xy+5z)(2xy-5z)$.
11. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$.
12. $(3a+1)(3a-1)(9a^2+1)$.
13. $(5a+3b)(5a-3b)(25a^2+9b^2)$.
14. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
15. $(x-z)(x-2y+z)$.
16. $(4+p+q+r)(4-p-q-r)$.
17. $(2a+2b+5)(2a+2b-5)$.
18. $(x+4y-3z)(x-2y+3z)$.
19. $(21a+8b)(9a-28b)$.
20. $a^2(bc-bd+c+d)(bc-bd-c-d)$.
21. $4b(a+c)$.
22. $(a-3b)(3a+b-2c)$.
23. $px(2qx-rx+qy-2ry)(2qx-rx-qy+2ry)$.

## প্রশ্নমালা 47. ( পৃঃ 141-142 )

1. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.
2. $(a^2b^2+abc+c^2)(a^2b^2-abc+c^2)$.
3. $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$.
4. $(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$.
5. $(a^2+ab+2b^2)(a^2-ab+2b^2)$.
6. $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$.
7. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$.
8. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.
9. $9(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
10. $(x^2+6x+2)(x^2-6x+2)$.
11. $(1+a+b)(1-a-b)$.
12. $(3x-y+2z)(3x-y-2z)$.
13. $(x^2-2y^2+1)(x^2-2y^2-1)$.
14. $(a+2b+c)(a-c)$.
15. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.
16. $(2x+y-3z+1)(2x-y-3z-1)$.
17. $(2x+y+3z)(2x-3y-3z)$.
18. $(a+b-3)(a-b-7)$.
19. $(x+2y)(x-2y-3)$.
20. $2(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$
21. $3(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$.
22. $(3a^2+2a-4)(3a^2-2a-4)$.
23. $(3a^2+a+8)(3a^2-a+8)$.
24. $(4x^2+x+9)(4x^2-x+9)$.
25. $(2x^2+3xy+3y^2)(2x^2-3xy+3y^2)$.
26. $(2x+z)(2x-2y-z)$.

27. $(3x^2+xy+y^2)(3x^2-xy+y^2)(9x^4-5x^2y^2+y^4)$.
28. $(x^2+7x-2)(x^2-7x-2)$.
29. $(x^2+x-3-2y)(x^2-x-3+2y)$.
30. $(a-1-y)(a-3+y)$. 31. $(a-2-y)(a-4+y)$.
32. $(ax-bx+by+ay)(ax+bx+by-ay)$.
33. $(x+1)(x-1)(1+y)(1-y)$.
34. $(x+y+a+b)(x+y-a-b)(a-b+x-y)(a-b-x+y)$.

## প্রশ্নমালা 48. ( পৃঃ 143 )

1. $(3x+1)^3$. 2. $(5x-2)^3$. 3. $(2a+7b)^3$. 4. $(1-8x)^3$.
5. $(4x-3)^3$. 6. $(6a^2+5b^2)^3$. 7. $(2ab-c)^3$.
8. $2ab(5a+4b)^3$. 9. $(2a+2b+3c)^3$. 10. $(a^2-7a+12)^3$.

## প্রশ্নমালা 49. ( পৃঃ 145 )

1. $(3x+1)(9x^2-3x+1)$. 2. $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$.
3. $(4x-1)(16x^2+4x+1)$. 4. $3a(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.
5. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.
6. $(3x^2-4y^2)(9x^4+12x^2y^2+16y^4)$.
7. $(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$.
8. $(9x-2y^2)(81x^2+18xy^2+4y^4)$. 9. $(7x+2)(49x^2-14x+4)$.
10. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2+xy+y^2)$
$(x^2-xy+y^2)$.
11. $x^2y^2(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$.
12. $(a-c)(a^2+3b^2+c^2-3ab-3bc+ac)$.
13. $(2x-y-z)(4x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$.
14. $(2x-5y+3z)(4x^2+7y^2+9z^2-2xy-12yz-6zx)$.
15. $(a+b)(x-z)(x^2+3y^2+z^2-3xy-3yz+zx)$.
16. $(2a-1)^2(16a^4+16a^3+24a^2+4a+1)$.
17. $(a-b)(2a-2b-1)(4a^2-8ab+4b^2+2a-2b+1)$.

## প্রশ্নমালা 50. ( পৃঃ 148-149 )

1. $(x+2)(x+1)$. 2. $(x-2)(x-1)$. 3. $(x+2)(x-1)$.
4. $(x-2)(x+1)$. 5. $(x+2)(x+3)$. 6. $(x-2)(x-3)$.
7. $(x+1)(x+6)$. 8. $(x-1)(x-6)$. 9. $(x+3)(x-2)$.
10. $(x-3)(x+2)$. 11. $(x+6)(x-1)$. 12. $(x-6)(x+1)$.
13. $(x+2)(x+12)$. 14. $(x-2)(x-12)$. 15. $(x+12)(x-2)$.
16. $(x-12)(x+2)$. 17. $(x+6)(x+4)$. 18. $(x-6)(x-4)$.
19. $(x+6)(x-4)$. 20. $(x-6)(x+4)$. 21. $(x+24)(x+1)$.
22. $(x-24)(x-1)$. 23. $(x+24)(x-1)$. 24. $(x-24)(x+1)$.
25. $(x-16)(x-6)$. 26. $(x-12)(x+9)$. 27. $(x-30)(x+16)$.
28. $(x-11)(x+10)$. 29. $(x-50)(x+12)$. 30. $(x-18)(x+12)$.
31. $3(x+17)(x-3)$. 32. $x(x-15)(x+12)$. 33. $8x(x-6)(x-17)$.

34. $(ax-13b)(ax+6b)$. 35. $a(ax+40)(ax-2)$.
36. $(a+60)(a+17)$. 37. $(19-a)(a+30)$.
38. $(2-a^2)(a^2+22)$. 39. $(x^2+40)(x-1)(x+1)$.
40. $x(x^2-13)(x^2+3)$. 41. $(x-8)(x-6)$.
42. $(x-8)(x-9)$. 43. $(x-12)(x+11)$.
44. $(x+18)(x-7)$. 45. $(a^2-18)(a^2-13)$.
46. $(a^2+51)(a^2-50)$. 47. $(xy-12z)(xy+6z)$.
48. $(a+b-8)(a+b-9)$. 49. $(x^2+y^2+7)(x^2+y^2-9)$.
50. $(x+1)(x+4)(x^2+5x-7)$. 51. $(x-y)^2(x^2-7xy+y^2)$.
52. $(x-1)(x-2)(x+5)(x-8)$. 53. $(x+1)(x-5)(x-2)^2$.

## প্রশ্নমালা 51. ( পৃ: 151-152 )

1. $(2x+1)(x+1)$. 2. $(2x-1)(x-1)$. 3. $(2x-1)(x+1)$.
4. $(2x+1)(x-1)$. 5. $(x+1)(2x+3)$. 6. $(x-1)(2x-3)$.
7. $(2x+3)(x-1)$. 8. $(2x-3)(x+1)$. 9. $(3x+2)(x+1)$.
10. $(3x-2)(x-1)$. 11. $(x+1)(3x-2)$. 12. $(x-1)(3x+2)$.
13. $(3x+1)(x+2)$. 14. $(3x-1)(x-2)$. 15. $(x+1)(6x+1)$.
16. $(x-1)(6x-1)$. 17. $(6x-1)(x+1)$. 18. $(6x+1)(x-1)$.
19. $(x+2)(3x+4)$. 20. $(x-2)(3x-4)$. 21. $(2x+3)(4x-1)$.
22. $(x-4)(3x+2)$. 23. $(x+3)(5x-3)$. 24. $(3x+1)(5x-8)$.
25. $(3x-4)(5x-4)$. 26. $(2ab-7c)(7ab+c)$.
27. $(x-8)(3x-4)$. 28. $(5x+4)(5-6x)$. 29. $(1-5a)(5a-16)$
30. $(2a^2+1)(8a^2-15)$. 31. $(x-3y)(5x-27y)$.
32. $(2x-5y)(5x+3y)$. 33. $3(m-5n)(6m+n)$.
34. $3(2a^2+5b^2)(a^2-5b^2)$. 35. $a(a^2-8b)(3a^2+5b)$.
36. $(2x+3)(2x-3)(3x+5)(3x-5)$. 37. $(7x^2+5)(2x+1)(2x-1)$.
38. $(9x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$. 39. $(3x^2+5)(2x+1)(2x-1)$.
40. $(x^2y^2-5)(16x^2y^2+9)$. 41. $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$.
42. $(5xy+8z)(xy-2z)$. 43. $(3x-4y)(2x-5y)$.
44. $(3x^2+4)(5x^2-3)$. 45. $(5x-3)(7x+4)$. 46. $(4x+7)(3x+11)$.
47. $x(3x-7)(6x+5)$. 48. $(x+3)(4x+3)$. 49. $(x-3)(5x+8)$.
50. $(3x-4)(3x+10)$. 51. $(x+11)(3x-35)$.
52. $(3x+1)(2x-9)$. 53. $(a^2-5)(2a^2+5)$.
54. $(x^2-8)(4x^2-3)$. 55. $(a-b-7)(3a-3b+1)$.
56. $(a-4b+5c)(2a+5b-3c)$. 57. $(3a+b)(11b-3a)$.

## প্রশ্নমালা 52. ( পৃ: 158-159 )

20. (1) $(a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2$.

(2) $(3a-3b)^2-(a+b)^2$. (3) $\left(\frac{2x+a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

(4) $(6x+y)^2-(x-3y)^2$. (5) $(x-1)^2-(y-1)^2$.

(6) $(2x-3)^2-(3y-5)^2$. (7) $\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2$.

(8) $\left(\frac{2x-7}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2$. (9) $(x^2+7x+11)^2-(1)^2$.

(10) $(4x^2-16x+11)^2-(4)^2$.

21. (1) $(5x+9y)^2+(x+y)^2$. (2) $(2a+b-c)^2+(3b-5c)^2$.

(3) $(x^2+y^2+2)^2+(x^2-y^2+4xy)^2$.

(4) $(x^2+3x+1)^2+(3)^2$. (5) $(4x^2+8x-13)^2+(5)^2$.

### প্রশ্নমালা 54. ( পৃ: 165-166 )

1. $a^3b^3$ 2. $a^5b^3c^2$. 3. $xy^2z^3$. 4. $3a^2$.
5. $6a^2b^2c$. 6. $9yz$. 7. $23a^4b^3c^7$. 8. $19x^2yz^2$.
9. $5x^2y^3z^3$. 10. $11cyz$. 11. $17a^2b^3x^4$.
12. $59pq^2r^4y^2z^3$. 13. $26a^2b^8d^7$. 14. $49a^4b^6c^8x^4y^3$.
15. $12a^2c^6$. 16. $6b^2z^2$. 17. $19c^3z$. 18. $5bx$.

### প্রশ্নমালা 55. ( পৃ: 167-168 )

1. $a+b$. 2. $x(x+y)$. 3. $x+2$. 4. $x-2$.
5. $x^2(x+2)$. 6. $2x-1$. 7. $x+3$. 8. $a+b+c$.
9. $2x^3y^3(x-y)$. 10. $2xy(x^2+y^2)(x-y)$. 11. $7ab(a-4)$.
12. $x(x+1)$. 13. $x+2$. 14. $a-5$.
15. $x^2-4x-5$. 16. $x-2$. 17. $2a-3b$.
18. $ab(a^2+ab+b^2)$. 19. $5(a+b)(c+d)$. 20. $ab(a^2+b^2)$.
21. $x(x+3y)$. 22. $x(2x-1)$. 23. $2x+y$.
24. $1+2x+4x^2$. 25. $x^2-y^2$. 26. $3x+1$.

### প্রশ্নমালা 56. ( পৃ: 170 )

1. $a^4b^4$. 2. $a^2b^2c^2d$. 3. $12x^2y^2z$.
4. $6x^2y^3z^2$. 5. $12a^5b^3c^4$. 6. $40x^2y^4z^3$.
7. $42a^3b^4c^5$. 8. $150a^3b^2c^3dx^4y^2$. 9. $72x^9y^8z^9a$.
10. $60x^4y^4z^3$. 11. $78x^2y^4z^6p^3a$. 12. $270a^7b^3c^7d^7$.

### প্রশ্নমালা 57. ( পৃ: 173 )

1. $a^2b^2(a+b)$. 2. $xy(x+y)$. 3. $12x^2y^2(x+2y)$.
4. $(a+b)^2(a+2b)$. 5. $2a^2(a^2-4)$.
6. $(a+b)(5a+3b)(5a-3b)$. 7. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$.
8. $(x+2)(x-3)(x+4)$. 9. $(x-1)(x+2)(x+3)^2(x-3)$.
10. $(x+2y)(x+3y)(x-3y)(x+4y)$. 11. $(x+1)(x-1)(2x+1)$.
12. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)$. 13. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
14. $2x(x+3)(6x-7)(2x-5)(2x+1)$. 15. $(x+2)(x-3)(x+4)$.

16. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$.   17. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
18. $(x-2)(x-3)(2x+1)$.
19. $(x^2+xy^2+y^2)(x^2-xy^2+y^2)(x^2-xy^2-y^2)$.
20. $(2a-3b)(3a+2b)(a-b)(4a^2+6ab+9b^2)$.
21. $60(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
22. $(1+x+x^2)(1-x+x^2)$.
23. $(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.
24. $a(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^2+ab+b^2)$.
25. $(3x+1)(3x-1)(3x^2+1)(3x^2-1)(x^2-3)^2$.
26. $(x-1)^3(x+1)$.   27. $(2x+3y+z)(2x-3y-z)(2x+3y-z)$.

## প্রশ্নমালা 58. ( পৃঃ 178-179 )

1. $\frac{2x}{3y}$.   2. $\frac{3}{4abd}$.   3. $\frac{2qr^4}{3p}$.   4. $\frac{3a^3b}{5d}$.
5. $\frac{3bc}{4a}$.   6. $\frac{3a^2c^2}{5x}$.   7. $-\frac{3y}{4}$.   8. $-\frac{4y}{xz}$.
9. $\frac{9x^3y}{10z}$.   10. $\frac{4c^2y}{5a^2x}$.   11. $-\frac{3y}{4az}$.   12. $-\frac{2x}{7pyz}$.
13. $\frac{a-2b}{a+2b}$.   14. $\frac{a+2b}{ab(a+b)}$.   15. $\frac{x+1}{x-3}$.
16. $\frac{x}{x-1}$.   17. $\frac{x-12}{x+12}$.   18. $\frac{2x^2+6x+9}{3x}$.
19. $\frac{x^2}{2x-1}$.   20. $x-1$.   21. $\frac{9x^2-15x+25}{x(5x+3)}$.
22. $\frac{2x+1}{3x-1}$.   23. $\frac{3x+1}{x+1}$.   24. $\frac{1-3x}{2-3x}$.   25. $\frac{3x-1}{4x-1}$.
6. $\frac{2x+1}{3x+1}$.   27. $\frac{x+3}{2x+1}$.   28. $\frac{1+x}{1+x^2}$.   29. $\frac{9x^2+3x+1}{4x-3}$.
30. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$.   31. $\frac{9+3x+x^2}{12-x}$.
32. $\frac{(3x+1)^2}{(3x-1)(9x^2+1)}$.   33. $\frac{a+b+c}{a-b+c}$.
34. $\frac{a-b+c-d}{a+b+c+d}$.   35. $\frac{x-3y}{2x+y}$.   36. $\frac{2x^2+5x+3}{2x^2-5x+3}$.
37. $\frac{4x^2+2xy+y^2}{x+y}$.   38. 2.

## প্রশ্নমালা 59. ( পঃ 182 )

1. $\frac{15x^3}{15xy^2}, \frac{25x^2y}{15xy^2}, \frac{6y^3}{15xy^2}$.   2. $\frac{a^3}{abc}, \frac{b^3}{abc}, \frac{c^3}{abc}$.

3. $\frac{6az}{12xyz}, \frac{4bx}{12xyz}, \frac{3cy}{12xyz}$. 4. $\frac{ab(a+b)}{abc}, \frac{bc(b+c)}{abc}, \frac{ca(c+a)}{abc}$.

5. $\frac{a}{x^3y^3}, \frac{3by^2}{x^3y^3}, \frac{4cxy}{x^3y^3}, \frac{5dx^2}{x^3y^3}$.

6. $\frac{a(a+b)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \frac{cd(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \frac{b(b+c)(a+b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

7. $\frac{a^3(c-a)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{b^3(b-c)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{c^3(b-c)(c-a)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}$.

8. $\frac{x}{a-b}, \frac{-y}{a-b}$. 9. $\frac{ab}{b(a^2-b^2)}, \frac{-b}{b(a^2-b^2)}$.

10. $\frac{x(b^2-c^2)}{(b^2-c^2)^2}, \frac{y(b-c)^2}{(b^2-c^2)^2}, \frac{z(b+c)^2}{(b^2-c^2)^2}$.

11. $\frac{b^2c^2(c-a)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{c^2a^2(a-b)(b-c)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{a^2b^2(b-c)(c-a)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}$.

12. $\frac{a^2(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{b^2(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{c^2(a-b)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

13. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{a^3-b^3}, \frac{a(a-b)}{a^3-b^3}, \frac{b}{a^3-b^3}$.

14. $\frac{x+4}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \frac{3x^2(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+4)}$.

15. $\frac{(x+1)(x+2)(x-7)}{(x-1)(x-2)(x+2)(x-7)}, \frac{(x-3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)(x-7)}, \frac{(2x+1)(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-2)(x+2)(x-7)}$.

16. $\frac{1}{x^4+x^2+1}, \frac{2x(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1}, \frac{-3x^2(x^2+x+1)}{x^4+x^2+1}$.

17. $\frac{bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

18. $\frac{a^2bc(b^2-bc+c^2)}{b^4+b^2c^2+c^4}, \frac{b^2ca(c^2-b^2)(b^2-bc+c^2)}{b^4+b^2c^2+c^4}, \frac{c^2ab(a+b+c)}{b^4+b^2c^2+c^4}$.

## প্রশ্নমালা 60. ( পৃ: 186-189 )

1. $\frac{a+b}{abc}$. 2. $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$. 3. $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

4. $\frac{4x}{x^2-9}$. 5. $\frac{5a^2+17ab+8b^2}{(a+b)(2a+b)(b-a)}$. 6. 1.

7. $\frac{a^2-b^2}{abc}$. 8. $\frac{5}{4}$. 9. $\frac{-(x-y)}{2(x+y)}$.

10. $\frac{2+x}{1-x^3}$. 11. $\frac{a^3+b^3-c^3}{abc}$. 12. 0. 13. 2.

14. $\frac{2}{x^2+4x+3}$. 15. 1. 16. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$. 17. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

18. $\frac{3}{x^2-6x+5}$. 19. $\frac{7x+5}{(x+1)(x-1)(x+2)}$.

20. $\frac{-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 21. $\frac{3}{x^2-4x+3}$. 22. 0. 23. 1.

24. 1. 25. 1. 26. $-\frac{1}{2x-1}$. 27. 0.

28. $\frac{64ax^3}{16x^4-a^4}$. 29. $\frac{8a^7}{a^8-b^8}$. 30. $\frac{1}{a^4-x^4}$.

31. $\frac{16a}{1-a^4}$. 32. 0. 33. 0. 34. 1. 35. 1.

36. 0. 37. 0. 38. 1. 39. $\frac{3}{a+c}$. 40. $\frac{3x^2+2x+1}{4(1-x^4)}$.

41. 1. 42. $\frac{2}{(1-a^2)^2}$. 43. $\frac{8x^7}{x^8-256y^8}$.

44. 0. 45. $\frac{1}{x(x-a)(x-b)}$.

46. $\frac{16x^{15}}{x^{16}-1}$. 47. $x^4+2$.

## প্রশ্নমালা 61. ( পৃ: 192-193 )

1. $\frac{x^2}{y^2}$ 2. 1. 3. $\frac{a}{d}$. 4. $\frac{6c}{a}$. 5. $\frac{cy^2}{bxz}$.

6. $cy$. 7. $60z$. 8. $\frac{c}{10z^3a}$. 9. $\frac{xy^2(x-y)}{(x+y)}$.

10. $\frac{3z}{x^2(x+y)}$. 11. $\frac{2a}{a+2b}$. 12. $\frac{2}{3x^2}$.

13. $(a+b)(a^2+ab+b^2)$. 14. 1. 15. $a+b$. 16. $-\frac{1}{y}$.

17. 1. 18. 1. 19. 1. 20. $\frac{x}{y}$. 21. $\frac{1-b}{a}$.

22. $\frac{a-b}{a}$. 23. $\frac{ab}{(a-b)^2}$. 24. $\frac{a^4d^4+a^2b^2c^2d^2+b^4c^4}{c^4d^4}$.

25. $\frac{x^6-y^6}{x^3y^3}$. 26. $\frac{ab}{a-b}$.

27. $x-3$. 28. $\frac{4(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$. 29. 1. 30. $\frac{1}{x^3+y^3}$.

## প্রশ্নমালা 62. ( পৃ: 195-196 )

1. $\frac{3ab}{2}$. 2. $\frac{c^3}{a^2}$. 3. $\frac{ay}{bx}$. 4. $\frac{14b}{3a}$. 5. $4\frac{1}{2}$.

6. $2\frac{2}{5}$. 7. $\frac{4abyz}{3x}$. 8. 1. 9. 1.

10. $\frac{a-3b}{a-b}$. 11. $\frac{a+x}{a-4x}$. 12. 1. 13. $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{(x+y)(2x+3y)}$.

14. $\frac{1}{x}$ 15. 1. 16. $\frac{a^2+1}{a^2-1}$. 17. 1.

18. $\frac{1}{(a-b)^2}$. 19. $\frac{a}{a^2-b^2}$. 20. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$

21. $\frac{2(x^2+y^2)}{y^2}$. 22. $\frac{2a^2}{a^2+b^2}$.

## প্রশ্নমালা 63. ( পৃ: 200-201 )

1. 1. 2. 3. 3. $-4$. 4. 2. 5. 3.
6. 4. 7. 2. 8. 5. 9. 1. 10. 0.

11. $\frac{6a}{7}$. 12. $\frac{ab}{ac-1}$. 13. $\frac{a^2c}{b(c-a)}$. 14. $-(a+b)$.

15. $\frac{bd-ac}{a-b}$. 16. $2a$. 17. $\frac{1}{ab}$. 18. 1. 19. $\frac{1}{5}$.

20. 8. 21. 4. 22. 1. 23. $4\frac{1}{2}$. 24. $b$. 25. 5.

5. সরল কর :

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3-b^3}.$$ [1]

6. $a^2+2ab-2bc-c^2$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।
[ $(a+b)^2-(b+c)^2$ ]

7. উৎপাদক নির্ণয় কর :
(i) $3(x-y)^2-20(x-y)-7$ [ $(x-y-7)(3x-3y+1)$ ]
(ii) $a^2-b^2-c^2-2bc-a-b-c$ [ $(a+b+c)(a-b-c-1)$ ]

8. যদি $a+\frac{1}{a}=x$ হয়, প্রমাণ কর $a^3+\frac{1}{a^3}=x^3-3x.$

---

## III

1. $1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+21x$ কে $1+3x^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর। [ $1-2x^{\frac{1}{3}}+7x^{\frac{2}{3}}$ ]

2. যদি $a+\frac{1}{a}=3$ হয়, $a^4+\frac{1}{a^4}$ এর মান নির্ণয় কর। [47]

3. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :
$a^2-4,\ a^2-a-2,\ a^2+a-2$ [ $(a^2-1)(a^2-4)$ ]

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
$a^2-9,\ (a+3)^2,\ a^2+a-6$ [ $(a+3)$ ]

5. $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^2y-\frac{7}{3}xy^2-\frac{4}{3}y^3$ কে $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ দ্বারা ভাগ কর।
[ $x^2-xy-4y^2$ ]

6. উৎপাদক নির্ণয় কর :
$21-37a+10a^2$ [ $(a-3)(10a-7)$ ]

7. সমাধান কর :

$$\frac{x+a^2+2bc}{b-c}+\frac{x+b^2+2ca}{c-a}+\frac{x+c^2+2ab}{a-b}=0$$

[ $x=-(a^2+b^2+c^2)$ ]

8. প্রমাণ কর যে, $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

*9. কোন ক্রিকেট খেলায় এক পক্ষ $x$ এবং $(x+71)$ রান্‌ করে ; অপর পক্ষ $(3x-7)$ এবং $(2x-50)$ রান্‌ করিয়া 2 রানে হারিয়া যায়। প্রত্যেক পক্ষের রান্‌-সংখ্যা নির্ণয় কর। [42, 113 ; 119, 34]

**10.** নিম্নে একটি শিশুর জন্ম হইতে প্রথম বৎসরের কতিপয় মাসের ওজন দেওয়া হইল ; একটি অনুভূমিক লেখ অঙ্কিত কর।

| বয়স ( মাস ) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ওজন ( কি. গ্রা. ) | 3·4 | 4·8 | 6·8 | 7·7 | 8·4 | 9 | 10·4 |

## IV

**1.** (*i*) $a-b=2$ এবং $ab=15$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3-b^3=98$.

(*ii*) যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [110]

**2.** উৎপাদক নির্ণয় কর :

(*i*) $a^4+324$ $[\ (a^2+6a+18)(a^2-6a+18)\ ]$

(*ii*) $\frac{a^3}{512}-\frac{64}{a^3}$ $\left[\ \left(\frac{a}{8}-\frac{4}{a}\right)\left(\frac{a^2}{64}+\frac{1}{2}+\frac{16}{a^2}\right)\ \right]$

(*iii*) $acx^2-(ad+bc)x+bd.$ $[\ (ax-b)(cx-d)\ ]$

**3.** $7(a^2+9ab+20b^2)$ এবং $14(a^3-2a^2b-35ab^2)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। $[\ 7(a+5b)\ ]$

***4.** সরল কর :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{a}{a^2-1}+\frac{3}{a(a^2-1)}$$ $\left[\frac{2(a^2+1)}{a(a^2-1)}\right]$

**5.** সমাধান কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$ $[x=-2]$

**6.** ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

$a+b+c,\ a+b-c,\ a-b+c,\ b+c-a.$

$[2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4]$

**7.** $4a^4+16a^3-20a^2$, $3a^3+14a^2-5a$ এবং $a^4+125a$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর। $[\ a(a+5)\ ]$

***8.** $a(a+1)(a+2)(a+3)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর। $[\ (a^2+3a+1)^2-(1)^2\ ]$

***9.** যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$bc-a^2=ca-b^2=ab-c^2.$$

5. সরল কর :

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3-b^3}.$$ [1]

6. $a^2+2ab-2bc-c^2$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।
[ $(a+b)^2-(b+c)^2$ ]

7. উৎপাদক নির্ণয় কর :
(i) $3(x-y)^2-20(x-y)-7$ [ $(x-y-7)(3x-3y+1)$ ]
(ii) $a^2-b^2-c^2-2bc-a-b-c$ [ $(a+b+c)(a-b-c-1)$ ]

8. যদি $a+\frac{1}{a}=x$ হয়, প্রমাণ কর $a^3+\frac{1}{a^3}=x^3-3x$.

---

## III

1. $1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+21x$ কে $1+3x^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর। [$1-2x^{\frac{1}{3}}+7x^{\frac{2}{3}}$]

2. যদি $a+\frac{1}{a}=3$ হয়, $a^4+\frac{1}{a^4}$ এর মান নির্ণয় কর। [47]

3. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :
$a^2-4,\ a^2-a-2,\ a^2+a-2$ [ $(a^2-1)(a^2-4)$ ]

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
$a^2-9,\ (a+3)^2,\ a^2+a-6$ [ $(a+3)$ ]

5. $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^2y-\frac{7}{3}xy^2-\frac{4}{3}y^3$ কে $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ দ্বারা ভাগ কর।
[$x^2-xy-4y^2$]

6. উৎপাদক নির্ণয় কর :
$21-37a+10a^2$ [ $(a-3)(10a-7)$ ]

7. সমাধান কর :

$$\frac{x+a^2+2bc}{b-c}+\frac{x+b^2+2ca}{c-a}+\frac{x+c^2+2ab}{a-b}=0$$

[ $x=-(a^2+b^2+c^2)$]

8. প্রমাণ কর যে, $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

*9. কোন ক্রিকেট খেলায় এক পক্ষ $x$ এবং $(x+71)$ রান্ করে ; অপর পক্ষ $(3x-7)$ এবং $(2x-50)$ রান্ করিয়া 2 রানে হারিয়া যায়। প্রত্যেক পক্ষের রান্-সংখ্যা নির্ণয় কর। [42, 113 ; 119, 34]

10. নিম্নে একটি শিশুর জন্ম হইতে প্রথম বৎসরের কতিপয় মাসের ওজন দেওয়া হইল ; একটি অনুভূমিক লেখ অঙ্কিত কর।

| বয়স ( মাস ) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ওজন ( কি. গ্রা. ) | 3·4 | 4·8 | 6·8 | 7·7 | 8·4 | 9 | 10·4 |

## IV

1. (i) $a-b=2$ এবং $ab=15$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3-b^3=98$.
(ii) যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [110]

2. উৎপাদক নির্ণয় কর :
(i) $a^4+324$ [ $(a^2+6a+18)(a^2-6a+18)$ ]
(ii) $\frac{a^3}{512}-\frac{64}{a^3}$ $\left[\left(\frac{a}{8}-\frac{4}{a}\right)\left(\frac{a^2}{64}+\frac{1}{2}+\frac{16}{a^2}\right)\right]$
(iii) $acx^2-(ad+bc)x+bd.$ [ $(ax-b)(cx-d)$ ]

3. $7(a^2+9ab+20b^2)$ এবং $14(a^3-2a^2b-35ab^2)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [ $7(a+5b)$ ]

*4. সরল কর :
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{a}{a^2-1}+\frac{3}{a(a^2-1)}$$ $\left[\frac{2(a^2+1)}{a(a^2-1)}\right]$

5. সমাধান কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$ [$x=-2$]

6. ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :
$$a+b+c,\ a+b-c,\ a-b+c,\ b+c-a.$$
[$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$]

7. $4a^4+16a^3-20a^2$, $3a^3+14a^2-5a$ এবং $a^4+125a$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর। [ $a(a+5)$ ]

*8. $a(a+1)(a+2)(a+3)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর। [ $(a^2+3a+1)^2-(1)^2$ ]

*9. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$$bc-a^2=ca-b^2=ab-c^2.$$

26. $4\frac{1}{2}$. 27. 4. 28. 7. 29. $\frac{2ab}{a+3b}$. 30. $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$. 31. 12·4

32. 5. 33. 14. 34. 3. 35. 1·5. 36. $\frac{b^2-ab}{a+3b}$.

## প্রশ্নমালা 64. ( পৃঃ 204 )

1. 2. 2. $-18\frac{1}{2}$. 3. 6. 4. 20. 5. 6. 6. $-4$

7. $c$. 8. $-\frac{ab(m+n)}{am+bn}$. 9. $a+3b+5c$. 10. $bc+ca+ab$.

11. $-(a+b+c)$. 12. $-(a+b+c)$. 13. $\frac{bc+ca+ab}{abc}$.

14. $a+b$. 15. $a^3+b^3+c^3$.

## প্রশ্নমালা 65. ( পৃঃ 210-213 )

1. 19, 42. 2. 420 সে.মি.। 3. 60, 15. 4. 32, 27.

5. $\frac{12}{25}$. 6. $\frac{11}{13}$. 7. 50, 51, 52. 8. 63, 64, 65.

9. 8-টি দরে 56 এবং 12-টি দরে 24. 10. 400 টাকা। 11. 25 বৎসর।

12. 9 বৎসর। 13. পিতার 68 বৎসর, পুত্রের 32 বৎসর। 14. 70 বৎসর।

15. 91. 16. 18-টি দরে 96 এবং 15-টি দরে 70.

17. 22 সিকি, 98 দশ-পয়সা। 18. 60 আধুলি, 40 সিকি।

19. 8 চেয়ার, 5 টেবিল। 20. 15 দিন। 21. 6 দিন।

22. 960 টাকা। 23. 1830 টাকা। 24. 1100.

25. 33 বৎসর। 26. 2, 5, 1, 12. 27. 19, 31, 8, 96.

28. 84. 29. 56. 30. 26. 31. 26.

32. 73. 33. 123. 34. 456 অথবা 654. 35. 20 মিটার ও 15 মিটার।

36. 8 মিটার এবং 4 মিটার। 37. $3\frac{2}{3}$ কিলোমিটার।

## প্রশ্নমালা 67. ( পৃঃ 226 )

3. 10 একক, 13 একক, 5 একক, 6·7 একক ( প্রায় )।

4. 5 একক, 10 একক, 5·9 একক ( প্রায় )। 8. (3, 0). 9. (−1, 3).

# পরিশিষ্ট

## আদর্শ প্রশ্নপত্র

### I

1. $\frac{1}{2}a^2 - 3a + \frac{3}{4}$ কে $\frac{1}{4}a - \frac{1}{8}$ দ্বারা গুণ কর। $[\frac{1}{8}a^3 - \frac{13}{16}a^2 + \frac{9}{16}a - \frac{3}{32}]$

2. $2a^3 - a^2 - a - 3$ কে $2a - 3$ দ্বারা ভাগ কর। $[a^2 + a + 1]$

3. ভাজ্য $a^3 - 20a + 16$, ভাগফল $a + 5$ এবং ভাগশেষ $2a + 1$ হইলে ভাজক কত? $[a^2 - 5a + 3]$

*4. $x^3 + 2x^2 + ax + 18$ কে $x + 3$ দ্বারা সাধারণ প্রণালীতে ভাগ করিয়া দেখাও যে $a$-র মান 3 হইলে কোন ভাগশেষ থাকিবে না।

5. সমাধান কর:

$$\frac{x}{5} - \left(\frac{x}{3} - 7\right) = \frac{x}{4} - \left(\frac{x}{6} + 19\right) \qquad [x = 120]$$

6. $3a^2 - 2a + 1$ এবং $2a^2 + 3a - 1$ এর গুণফলে $a^3$-এর সহগ নির্ণয় কর। [5]

7. গুণনীয়ক নির্ণয় কর:

(i) $a^2 - 2a - 24$ $[(a-6)(a+4)]$

(ii) $ab^4 - a^4b$ $[ab(b-a)(b^2 + ab + a^2)]$

8. প্রমাণ কর যে,

$$(x-y)^3 + (x^2 - y^2)(x+y) - 2(x-y)(x^2+y^2) = 0$$

---

### II

1. (i) গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

$4 - a^2,\ a^2 - 4a + 4,\ a^2 - 5a + 6$ $[a - 2]$

(ii) ল. সা. গু. নির্ণয় কর:

$a^2 - a - 6,\ a^2 + a - 12,\ a^2 + 6a + 8$ $[(a+2)(a-3)(a+4)]$

2. লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর:

$$\frac{27 - a^3}{a^2 - 15a + 36}. \qquad \left[\frac{9 + 3a + a^2}{12 - a}\right]$$

*3. সমাধান কর:

$$\frac{14x - 3}{9} = \frac{x - 36}{2x + 5} + \frac{70x + 1}{45}. \qquad [20]$$

4. একটি খুঁটির অর্ধাংশ মাটির নীচে, এক-তৃতীয়াংশ জলের মধ্যে এবং জলের উপরে যে অংশ আছে উহার দৈর্ঘ্য 3 মিটার। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত? [18 মিটার]

10. কোন বালকের 12 সপ্তাহের প্রত্যেক সপ্তাহে 100 নম্বরের মধ্যে পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের একটি তালিকা দেওয়া হইল। একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কিত কর।

| সপ্তাহ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| প্রাপ্ত নম্বর | 42 | 45 | 61 | 55 | 58 | 60 | 65 | 60 | 58 | 62 | 64 | 60 |

## V

1. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(i) $x^2-9(y-z)^2$ [ $(x-3y+3z)(x+3y-3z)$ ]

(ii) $a+2b+a^3+8b^3$ [ $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2+1)$ ]

(iii) $15a^2+ab-6b^2$ [ $(5a-3b)(3a+2b)$ ]

2. সমাধান কর : $\frac{x-3}{\cdot5}+\frac{x-5}{\cdot2}=18-42x$ [$x=1$]

*3. যদি $\left(a+\frac{1}{a}\right)=\sqrt{3}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$.

4. $3a^2-14a+15$ এবং $a^2+a-12$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [ $(a-3)$, $(a-3)(3a-5)(a+4)$ ]

5. সরল কর :

$$\frac{a^4+b^4-ab(a^2+b^2)}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)}{a^2+2ab+b^2}$$ [$2ab$]

*6. (i) যদি $(x+y)^2=6$, $(x-y)^2=2$ হয়, $4xy(x^2+y^2)$ এর মান নির্ণয় কর। [16]

(ii) $a-\frac{1}{a}=\frac{1}{p}$ হইলে, $a^4+\frac{1}{a^4}$ এর মান কত ? $\left[\frac{1}{p^4}+\frac{4}{p^2}+2\right]$

*7. $a(a+1)(a+2)(a+3)+37$ কে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। [ $(a^2+3a+1)^2+(6)^2$ ]

*8. যদি $2p=x+y+z$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$4y^2z^2-(y^2+z^2-x^2)^2=16p(p-x)(p-y)(p-z)$$

9. কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে $x^\circ$, $2(2x+5)^\circ$ এবং $5(x+4)^\circ$ ; প্রত্যেক কোণের পরিমাণ ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [$15^\circ$, $70^\circ$, $95^\circ$]

10. ভারতবর্ষের 1881-1931 এর আদমসুমারীর তালিকা দেওয়া হইল; একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে 1905 এবং 1926 এর আনুমানিক লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

| আদমসুমারীর বৎসর | 1881 | 1891 | 1901 | 1911 | 1921 | 1931 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| জনসংখ্যা ( কোটিতে ) | 25·4 | 28·7 | 29·4 | 31·5 | 31·9 | 35·3 |

## VI

1. সরল কর :

$$5x-[4x-\{3x-(2x-\overline{x-1})\}]$$ [$3x-1$]

2. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ এর সহিত $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}z$ যোগ করিয়া যোগফল হইতে $2x+y+\frac{3}{4}z$ বিয়োগ কর। [$-x-y-z$]

3. $1-x+2x^2$ কে $1+x+2x^2$ দ্বারা গুণ কর। [$1+3x^2+4x^4$]

*4. $x^2+y^2=50$ এবং $x-y=6$ হইলে, $xy$ এর মান নির্ণয় কর। [7]

5. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(i) $8+10x-3x^2$ [ $(4-x)(2+3x)$ ]

(ii) $a^2+b^2-2ab-a+b$ [ $(a-b)(a-b-1)$ ]

6. সমাধান কর : $2-\frac{x}{2}=1-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$ [$x=20$]

7. সরল কর : $\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a-b}+\frac{2ab}{b^2-a^2}$ [1]

8. (i) $a$-সংখ্যক পুস্তকের মূল্য $b$-টাকা হইলে $c$-সংখ্যক পুস্তকের মূল্য নির্ণয় কর। [$\frac{bc}{a}$ টাকা]

(ii) $x$ একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, উহার পূর্ববর্তী ও পরবর্তী যুগ্ম সংখ্যা নির্ণয় কর। [ $(x-2)$ ও $(x+2)$ ]

(iii) $p$-সংখ্যক পেন্সিলের মূল্য $a$-টাকা এবং $q$-সংখ্যক পেন্সিলের মূল্য $b$-টাকা হইলে, গড়ে প্রত্যেকটি পেন্সিলের মূল্য কত? [$\frac{a+b}{p+q}$ টাকা]

## VII

1. $\sqrt{2a^2+3b+3(c-a)}-\sqrt[3]{c^2+2(b-a)}-2\sqrt{b-a}$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=3$, $b=4$, $c=5$. [1]

2. 0 অপেক্ষা $-2a^2+3b^2-c^2$ কত কম? $a+b+c$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $2a-b+c$ হয়? [$2a^2-3b^2+c^2$ ; $a-2b$]

3. $a^6-64$ কে $a^2-2a+4$ দ্বারা ভাগ কর। [$a^4+2a^3-8a-16$]

4. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(i) $16a^4-54ab^3c^3$ [ $2a(2a-3bc)(4a^2+6abc+9b^2c^2)$ ]

(ii) $6a^2-19ab-11b^2$ [ $(2a+b)(3a-11b)$ ]

5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^2-2y^2,\ 4x^2-8xy+4y^2,\ 6(x^2+xy-2y^2)$ [ $2(x-y)$ ]

6. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^2-4y^2,\ x^3-4x^2y+4xy^2,\ x^3-8y^3-6xy(x-2y)$

[ $x(x+2y)(x-2y)^3$ ]

7. $x+y=4c$ হইলে, $x^3+y^3+12xyc$ এর মান নির্ণয় কর। [$64c^3$]

*8. সমাধান কর :

$$\frac{x-c^3}{a+b}+\frac{x-a^3}{b+c}+\frac{x-b^3}{c+a}+ab+bc+ca-2a^2-2b^2-2c^2=0$$

[ $x=a^3+b^3+c^3$ ]

*9. সরল কর : $\left\{\frac{x}{y}+\frac{2x^2}{y(b-x)}\right\}\left\{\frac{y}{x}-\frac{2xy}{x(b+x)}\right\}$ [1]

*10. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 129 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [42, 43, 44]

## VIII

1. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{b+11}}{\sqrt{ab}}$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=144$ এবং $b=25$. [$\frac{17}{60}$]

2. $a=-5$ হইলে,

$\frac{a(a+1)(a-1)(a-2)}{(a-3)(a-4)(a+10)(a+12)}$ এর মান নির্ণয় কর। [$\frac{1}{3}$]

3. $4x^2+y^2+1-2xy+2x+y$ কে $2x+y-1$ দ্বারা গুণ কর।

[$8x^3+y^3+6xy-1$]

4. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(i) $(2x)^6-y^6z^6$

[ $(2x+yz)(4x^2-2xyz+y^2z^2)(2x-yz)(4x^2+2xyz+y^2z^2)$ ]

(ii) $2x^2-xy-6y^2$ [ $(x-2y)(2x+3y)$ ]

*5. সরল কর :

$3{\cdot}87\times3{\cdot}87\times3{\cdot}87+1{\cdot}13\times1{\cdot}13\times1{\cdot}13+15\times3{\cdot}87\times1{\cdot}13$ [125]

6. $4x^2y(15x^2-2x-8)$ এবং $6xy^2(21x^2-x-10)$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [ গ. সা. গু. $= 2xy(3x+2)$ ; ল. সা. গু. $= 12x^2y^2(3x+2)(5x-4)(7x-5)$]

7. $a+b=-c$ হইলে, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3-3abc=-c^3$.

8. সরল কর : $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a-c}{ca+c^2}+\frac{2c}{c^2-a^2}$ $\left[\frac{3}{a+c}\right]$

9. সমাধান কর : $\frac{x-2b}{b}=\frac{b-a-x}{a}$ $[x=b]$

*10. টাকায় 12-টি করিয়া আম ক্রয় করিয়া এবং টাকায় 9-টি করিয়া বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির 6 টাকা লাভ হইল। সে কয়টি আম ক্রয় করিয়াছিল ? [216]

---

## IX

1. সরল কর :
$3a-[a+b-2\{a+b+c-(a-b+c-d)\}+a]$ $[a+3b+2d]$

2. $\frac{a}{2}-\frac{b}{3}$, $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$, $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}$, $\frac{a^4}{16}+\frac{b^4}{81}$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। $\left[\frac{a^8}{256}-\frac{b^8}{6561}\right]$

3. $4a^4b^4+81c^4$ কে $2a^2b^2+6abc+9c^2$ দ্বারা ভাগ কর। $[2a^2b^2-6abc+9c^2]$

4. উৎপাদক নির্ণয় কর :
(i) $a^3+b^3-ab(a+b)$ $[(a+b)(a-b)^2]$
(ii) $4+8a^2+9a^4$ $[(3a^2+2a+2)(3a^2-2a+2)]$

*5. প্রমাণ কর যে $(5x^2-16x+13)^2-4(x-2)^2(2x-3)^2 = (3x^2-8x+5)^2$

6. সমাধান কর : $7\frac{1}{4}+\frac{4-5x}{7}=3\frac{1}{4}+\frac{2x-3}{7}$ $[x=5]$

7. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :
$3x^2-15x+18$, $6x^3-42x+72$ এবং $4x^2-20x+16$ $[12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]$

8. সরল কর : $\frac{x+x^2}{1+x+x^2}-\frac{x-x^2}{1-x+x^2}+\frac{1+x^2-x^4}{1+x^2+x^4}$ [1]

*9. যদি $2x+3y=7$ এবং $xy=2$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(2x-3y)^2=1$.

10. (i) এক ব্যক্তি $m$-ঘণ্টায় $x$-কিলোমিটার পথ যায় ; তাহার বেগ মিনিটে কত মিটার ? $\left[\frac{50x}{3m}\right]$

(*ii*) $a$-বৎসর পূর্বে যাহার বয়স $x$-বৎসর ছিল, $b$-বৎসর পরে তাহার বয়স কত বৎসর হইবে ? [ $(x+a+b)$ বৎসর ]

(*iii*) প্রত্যেকটি $a$-টাকা দরে $b$-সংখ্যক, প্রত্যেকটি $c$-টাকা দরে $d$-সংখ্যক এবং প্রত্যেকটি $g$-টাকা দরে $h$-সংখ্যক দ্রব্য ক্রয় করা হইলে প্রত্যেক দ্রব্যের গড় মূল্য কত ? $\left[\dfrac{ab+cd+gh}{b+d+h}\text{ টাকা}\right]$

---

# X

1. সরল কর : $4x-y-3\{x-2y-4(2x+y)+5(x+y)\}$ [$10x+2y$]

2. $x^2+x+1$, $x^2-x+1$ এবং $x^4-x^2+1$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। [ $x^8+x^4+1$ ]

3. $-c^3+6abc+a^3+8b^3$ কে $-c+a+2b$ দ্বারা ভাগ কর। [$a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca$]

4. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(*i*) $5x^2-29x+42$ [ $(x-3)(5x-14)$ ]

(*ii*) $5x^2-29x-42$ [ $(5x+6)(x-7)$ ]

(*iii*) $x^6-729y^6$

[ $(x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$ ]

*5. প্রমাণ কর যে $(a-3b)(a-b)(a+b)(a+3b)$

$=(a^2-5b^2)^2-(4b^2)^2$

*6. যদি $x-\dfrac{1}{x}=m$ হয়, $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

[ $m^4+4m^2+2$ ]

7. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6b(a^2-ab)^2$, $9a^3b^2+9a^2b^3-18ab^4$ এবং $15a^4b^2-15a^2b^4$

[ $3ab(a-b)$ ]

8. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$a^2b-b(b-c)^2$, $ac^2-a(a+b)^2$ এবং $c(a-c)^2-b^2c$

[ $abc(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$ ]

9. সমাধান কর : $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$ [ $x=abc$ ]

*10. পিতার বয়স তাহার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির তিন গুণ। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে। পিতার বয়স কত ?

[ 36 বৎসর ]

---

# বীজগণিতের নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষা

## (Objective Tests in Algebra)

### সপ্তম শ্রেণী

প্রশ্নগুলির উত্তর যথাসম্ভব মানসিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে করাই বাঞ্ছনীয়।

**I. ডান দিকে [ ] চিহ্নিত স্থানে উত্তর লিখ :**

(1) $2a$ এবং $3b$-এর যোগফল। (নমুনা) [ $2a+3b$ ]

(2) $3a$ হইতে $2b$-এর বিয়োগফল। [ ]

(3) $5a$, $2b$ এবং $3c$-এর যোগফল। [ ]

(4) $7a$ এবং $b$-এর গুণফল। [ ]

(5) $3a$-কে $5b$ দ্বারা ভাগের ভাগফল। [ ]

(6) $2a$ এবং $7a$-এর সমষ্টি। [ ]

(7) $7a$ হইতে $-3a$-এর বিয়োগফল। [ ]

(8) $a^2$ ও $b^2$-এর সমষ্টি হইতে $c^2$-এর বিয়োগফল। [ ]

(9) $x$, $y$ এবং $z$-এর গুণফল। [ ]

(10) $a^2$, $a^3$ এবং $b^2$-এর গুণফল। [ ]

(11) $x$-এর অর্ধ হইতে $y$-এর এক-তৃতীয়াংশের বিয়োগফল। [ ]

(12) 0 হইতে $-7b$-এর বিয়োগফল। [ ]

(13) $4a^2$ হইতে $9b^2$-এর বিয়োগফলকে $2a$ এবং $3b$-এর সমষ্টি দ্বারা ভাগের ভাগফল। [ ]

(14) $2x$ হইতে $3y$ কত বৃহত্তর ? [ ]

(15) $5a$ হইতে $3b$ কত ক্ষুদ্রতর ? [ ]

**II. ডান দিকে [ ] চিহ্নিত স্থানে উত্তর লিখ :**

(1) দুইটি সংখ্যার যোগফল 10 ; উহাদের একটি $x$ হইলে, অপরটি কত ? [ $10-x$

(2) কোন্ সংখ্যা হইতে $y$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x$ হয় ? [

(3) কোন্ সংখ্যার সহিত $y$ যোগ করিলে যোগফল $x$ হয় ? [ ]

(4) কোন্ সংখ্যাকে $y$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $x$ হয় ? [ ]

(5) কোন্ সংখ্যাকে $y$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $x$ হয় ? [ ]

(6) দুইটি সংখ্যার গুণফল 20 ; উহাদের একটি $x$, অপরটি কত ? [ ]

(7) দুইটি সংখ্যার ভাগফল 15 ; উহাদের ভাজ্যটি $y$, ভাজকটি কত ? [ ]

(8) ভাজ্য $x$ এবং ভাগফল $y$ ; ভাজক কত ? [ ]

(9) ভাজক $x$, ভাগফল $y$ এবং ভাগশেষ $z$ ; ভাজ্য কত ? [ ]

(10) তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার একটি $a$, উহার ঠিক পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী সংখ্যা দুইটি কত ? [ ]

III. ডান দিকে [ ] চিহ্নিত স্থানে উত্তর লিখ :

(1) $a$-টাকায় কত পয়সা ? [ $100a$ ]

(2) $x$-মিনিটে কত সেকেণ্ড ? [ ]

(3) $x$ টাকা $y$ পয়সায় কত পয়সা ? [ ]

(4) $2a$ টাকা হইতে $3b$ পয়সা খরচ করিলে কত পয়সা থাকে ? [ ]

(5) $x$ টাকা $y$ পয়সায় কত টাকা ? [ ]

(6) $(5x + 3y)$ টাকা $z$ জনের মধ্যে সমান ভাগ করিয়া দিলে, প্রত্যেকে কত টাকা করিয়া পাইবে ? [ ]

(7) $(7x + 2y)$ টাকা $a$-সংখ্যক বালকের মধ্যে সমান ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেক বালক কত পয়সা করিয়া পাইবে ? [ ]

(8) একটি ঝুড়িতে $x$-সংখ্যক আম ছিল ; উহা হইতে $a$-সংখ্যক আম নষ্ট হইয়া গেল। অবশিষ্ট আম $3b$-সংখ্যক বালকের মধ্যে সমান ভাগ করিয়া দেওয়া হইল ; প্রত্যেকে কয়টি করিয়া আম পাইল ? [ ]

(9) কোন ফেরিওয়ালা $x$-সংখ্যক আম ধরে এইরূপ $y$-সংখ্যক ঝুড়ি আম ক্রয় করিয়া সমস্ত আম $z$-টাকায় বিক্রয় করিল; সে টাকায় কয়টি করিয়া আম বিক্রয় করিল? [ ]

(10) কোন লোকের বর্তমান বয়স $x$-বৎসর; $y$-বৎসর পূর্বে তাহার বয়স কত ছিল? $y$-বৎসর পরেই বা তাহার বয়স কত হইবে? [ ]

(11) একটি জলপূর্ণ বালতির ওজন $x$-কি.গ্রা.। যদি বালতির ওজন $y$-কি.গ্রা. হয় তাহা হইলে বালতিটিতে কত কি.গ্রা. জল ধরে? [ ]

(12) কোন গোয়ালা 10 লিটার দুগ্ধ ক্রয় করিয়া উহাতে $x$-লিটার জল মিশ্রিত করিল এবং মিশ্রিত দুগ্ধের প্রতি লিটার 1 টাকা দরে বিক্রয় করিয়া মোট 12 টাকা 50 পয়সা পাইল। $x$ = কত? [ ]

(13) একখানি মোটর গাড়ী প্রথম ঘণ্টায় $x$-কিলোমিটার, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $y$-কিলোমিটার চলিয়া কোন স্থানে পৌঁছিয়া তথা হইতে রওনাস্থলের দিকে $z$-কিলোমিটার ফিরিয়া আসিল; গাড়ীখানি যাত্রাস্থল হইতে এখন কত দূরে অবস্থিত? [ ]

(14) একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য $3a$ মিটার এবং প্রস্থ $2b$ মিটার; উহার ক্ষেত্রফল কত? [ ]

**IV. প্রতি প্রশ্নের ডান দিকের উত্তরগুলির মধ্যে শুদ্ধ উত্তরটির উপরে ✓ এইরূপ চিহ্ন দাও:**

| | উত্তর |
|---|---|
| (1) $a$ এবং 2 এর গুণফল | $= [a^2, 2a]$ |
| (2) $3a - (-b)$ | $= [3a - b, 3a + b]$ |
| (3) $3a \times (-2b)$ | $= [-5ab, 6ab, -6ab]$ |
| (4) $(-3a) \times (-2b)$ | $= [5ab, -6ab, 6ab]$ |
| (5) $10a \div 2a$ | $= [5a, 5]$ |
| (6) $12a \div (-3a)$ | $= [4a, -4a, -4]$ |

(7) $(-15x) \div (-3x)$ $= [-5x,\ 5x,\ 5]$

(8) $7x$ এবং $3y$-এর সমষ্টি $= [10xy,\ 7x + 3y]$

(9) $-10x - (-7x)$ $= [-17x,\ 3x,\ -3x]$

(10) $(-2x) + (-3x) - (-5x)$ $= [-10x,\ 0]$

(11) $a \div b \times c$ $= \left[\frac{a}{bc},\ \frac{ac}{b}\right]$

(12) $(5a)^2 - 5a^2$ $= [0,\ 20a^2]$

(13) $a^5 \times b^5$ $= [(ab)^{10},\ (ab)^{25},\ a^5b^5]$

(14) $x^3 \times x^2 \times x^4$ $= [x^{24},\ x^9]$

(15) $(-2)^3 \times (-3)^3$ $= [-6^6,\ 6^6,\ -72]$

(16) $a, b, c, d$ এর সমষ্টি $= [abcd,\ ab + cd,\ a + b + c + d]$

(17) $c = 0$ হইলে, $625abc$ $= [625ab,\ 625,\ 0]$

(18) $7ab + * = 10ab$ $* = [3,\ 3ab,\ 3a,\ 3b]$

(19) $12x^4y^8z^6 \div * = 2x^2y^2z^2$ $* = [6x^2y^4z^3,\ 10x^2y^6z^4,\ 6x^2y^6z^4]$

(20) $* \div 3x^2y^2z^2 = 6xyz$ $* = [\frac{1}{2}xyz,\ 18x^3y^3z^3]$

V. প্রত্যেক স্থলে শুদ্ধ উত্তরের উপরে √ এইরূপ চিহ্ন দাও :

(1) যদি $a = 2, b = 3, c = 4$ হয়, (উত্তর)
তাহা হইলে, $2a - b - c$ $= 5,\ = 11,\ = -3$

(2) যদি $a = 2, b = 4, c = 5$ হয়,
তাহা হইলে, $a + 2 \times b \times c$ $= 30,\ = 80,\ = 42$

(3) যদি $x = 8, y = 5, z = 0$ হয়,
তবে, $\dfrac{2z}{x + y}$ $= \frac{2}{13},\ = \frac{20}{13},\ = 0$

(4) যদি $a = 12, b = 6, c = 4, d = 2$ হয়,
তবে, $a \div b \div c \times d$ $= 4,\ = 1,\ = \frac{1}{4}$

(5) যদি $a = 16, b = 4$ হয়,
তবে, $\sqrt{a} + 12b$ $= 8,\ = 52,\ = 64$

(6) যদি $x = 12, y = 8, z = 6, p = 2$ হয়,
তবে, $2x - (y - z \div p)$ $= 23,\ = 19$

VI. ডান দিকের [ ] চিহ্নিত স্থানে উত্তর লিখ :

( উত্তর )

(1) $\left.\begin{array}{l} a+2b+3c \\ 3a+2b+c \\ 2a+2b+2c \end{array}\right\}$ যোগফল = [ ]

(2) $\left.\begin{array}{l} 5a^2+2b^2-3c^2 \\ 2a^2-3b^2+4c^2 \\ a^2-4b^2-5c^2 \end{array}\right\}$ যোগফল = [ ]

(3) $\left.\begin{array}{l} 3x^2+7y^2-8z^2 \\ 2x^2-3y^2-4z^2 \end{array}\right\}$ বিয়োগফল = [ ]

(4) $\left.\begin{array}{l} 7x^2-3y^2-2c^2 \\ 4x^2-3y^2-3c^2 \end{array}\right\}$ বিয়োগফল = [ ]

(5) $4ab\times(-3a^2b)\times 3b^2c^2\times(-2a^3b^2c)$ = [ ]

(6) $-16a^5b^4c^8\div(-4a^2b^2c^2)$ = [ ]

(7) $(px^3-3px^2+5p)\div\frac{1}{2}p$ = [ ]

VII. শুদ্ধ উত্তরগুলিতে ✓ এবং ভুল উত্তরগুলিতে × চিহ্ন দাও :

(1) $2a+3a$ $=5a$ [ ✓ ]

(2) $3x+2$ $=5x$ [ × ]

(3) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+x$ $=\frac{5}{4}x$ [ ]

(4) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x$ $=\frac{1}{5}x$ [ ]

(5) $(2a+3b)^2$ $=4a^2+9b^2$ [ ]

(6) $(2a+3b)(2a-3b)$ $=2a^2-3b^2$ [ ]

(7) $(x+y-z)-(x-y+z)$ $=2y-2z$ [ ]

(8) $4x^2-12xy+9y^2$ $=(2x-3y)^2$ [ ]

(9) $(a+\frac{1}{2}b)(a-\frac{1}{2}b)$ $=a^2-\frac{1}{2}b^2$ [ ]

(10) $4x-1=59$ হইলে, $x=15$ [ ]

(11) $4x+6=7$ হইলে, $x=\frac{1}{4}$ [ ]

(12) $12x+2=9x+29$ হইলে, $x=9$ [ ]

(13) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=1\frac{1}{12}$ হইলে, $x=1$ [ ]

(14) $(a^2x^2+6abxy+9b^2y^2)\div(ax+3by)=ax+3by$ [ ]

(15) $(\cdot 82)^2+(\cdot 18)^2+2\times\cdot 82\times\cdot 18=1$ [ ]

(16) $(x-3)(x+2)=x^2+x-6$ [ ]

(17) $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$ [ ]

(18) কোন যুগ্ম সংখ্যা $x$ হইলে উহার পূর্ববর্তী যুগ্ম সংখ্যা $x-1$.[ ]

**VIII. * চিহ্নিত স্থানের উপযুক্ত অঙ্ক বা চিহ্ন বসাও :**

(1) $(x+*)^2=x^2+2xy+*$ [ $y, y^2$ ]

(2) $(2a+*)^2=4a^2+12ab+*$ [ ]

(3) $(3a^2-*)^2=9a^4-18a^2b^2+*$ [ ]

(4) $(2x-3y)^2=4x^2 * 12xy+*$ [ ]

(5) $(2a+3b)(2a * *)=4a^2-9b^2$ [ ]

(6) $4a^2+4a+*=(2a+*)^2$ [ ]

(7) $(a^2+ab+b^2)(a^2-*+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$ [ ]

(8) $a^2+b^2=(a+b)^2-*$ [ ]

(9) $(a-b)^2=(a+b)^2-*$ [ ]

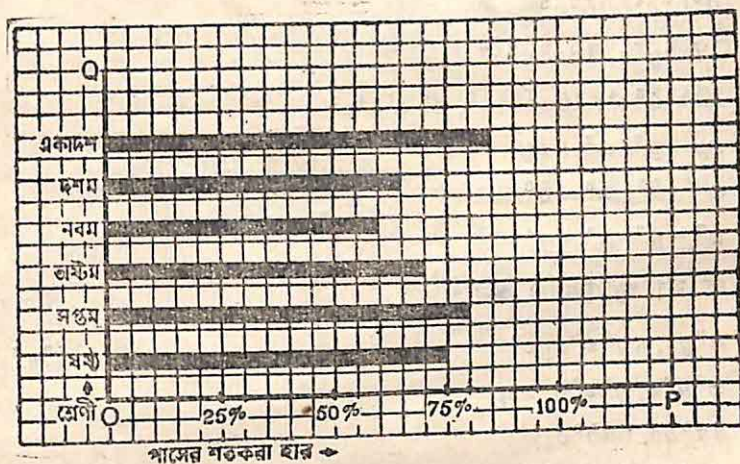
(10) $(*)(a-b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$ [ ]

(11) $(x^2+x+1)(x^2 * x * 1)=x^4+x^2+1$ [ ]

(12) $(a^2+2ab+2b^2)(a^2 * 2ab+2b^2)=a^4+4b^4$ [ ]

**IX.** (1) কোন ফেরিওয়ালার সাত সপ্তাহের লাভের পরিমাণ যথাক্রমে 30, 35, 41, 33, 48, 50 ও 42 টাকা। সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন লাভের অঙ্ক যথাযথ সপ্তাহের নীচের ঘরে বসাও।

| সপ্তাহ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লাভ ( টাকা ) | | | | | | | |

(2) কোন বিদ্যালয়ের ষষ্ঠ হইতে দশম শ্রেণীর ছাত্রদের বার্ষিক পরীক্ষায় এবং একাদশ শ্রেণীর টেষ্ট পরীক্ষায় পাসের শতকরা হারের একটি অনুভূমিক লেখ ( Bar-graph ) দেওয়া হইল।

উক্ত লেখ-চিত্র হইতে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর কর : উত্তর

(*i*) কোন্ শ্রেণীর পাসের হার সর্বাপেক্ষা বেশী ? [ ]

(*ii*) কোন্ শ্রেণীর পাসের হার সর্বাপেক্ষা কম ? [ ]

(*iii*) অষ্টম শ্রেণীর পাসের হার কত ? [ ]

(*iv*) নবম ও দশম শ্রেণীর পাসের হারের অন্তর কত ? [ ]

(*v*) ষষ্ঠ শ্রেণী অপেক্ষা একাদশ শ্রেণীর পাসের হার কত বেশী ? [ ]

## অষ্টম শ্রেণী

I. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : উত্তর

(1) $x^4y^3, x^3y^4$ [ $x^3y^3$ ]

(2) $a^2b^3c^4, ab^2c^3$ [ ]

(3) $12x^3y^2z, 18x^2y^3z^2$ [ ]

(4) $10a^2b^3c^4, 15a^3b^2c^3, 35a^4b^4c^3$ [ ]

(5) $xy+y^2, x^2+xy$ [ ]

(6) $a^2-b^2, a^3-b^3$ [ ]

(7) $x^3-y^3, x^4-y^4$ [ ]

II. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : উত্তর

(1) $x^2yz, xy^2z, xyz^2$ [ $x^2y^2z^2$ ]

(2) $x^2y^2z, y^2z^2p, xzp$ [ ]

(3) $4a^2bc, 6ab^2c$ [ ]

(4) $8a^2b^3c^2, 10b^4c^3$ [ ]

(5) $7x^3y^4z^5, 21xy^3$ [ ]

(6) $a^2+ab, ab+b^2$ [ ]

(7) $a^2-b^2, a^4-b^4$ [ ]

(8) $a^2-b^2, a^2+b^2, a^4-b^4$ [ ]

III. লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর : উত্তর

(1) $\frac{a^2b^2c^2}{abc}$ [ $abc$ ]

(2) $\frac{a^3b^2c}{abc}$ [ ]

(3) $\frac{10a^3b^4c^5}{5a^2b^3c^4}$ [ ]

(4) $\frac{15a^2b^3c^4}{30a^3b^4c^5}$ [ ]

(5) $\dfrac{21a^2b^3c^4}{-28a^2b^2c^4}$ [ ]

(6) $\dfrac{-35a^4b^3c^2}{-45ab^2c^3}$ [ ]

(7) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ [ ]

(8) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ [ ]

IV. যে প্রশ্নের উত্তর যেটি হইবে তাহা সেই প্রশ্নের ডান দিকে [ ] এইরূপ বন্ধনীর মধ্যে বসাও :

[ উত্তর : 6, $\frac{2}{3}$, −5, 29, 4, 17, 7 ]

$a=4$, $b=3$, $c=2$ ধরিয়া মান নির্ণয় কর :

(1) $5a+3b$ [ ]

(2) $5b-10c$ [ ]

(3) $4abc\div 4a$ [ ]

(4) $a\div b\div c$ [ ]

(5) $\sqrt{a}+5b$ [ ]

(6) $\sqrt{a+4b}$ [ ]

(7) $3a-5(b-c)$ [ ]

V. [ ] চিহ্নিত স্থানে উত্তর লিখ :

(1) যোগ কর : $a+b,\ b-c,\ c-a$ [ ]

(2) যোগ কর : $2x+3y,\ 3x+y,\ -5x-4y$. [ ]

(3) যোগ কর : $3a+2b+c,\ a+2b+3c,\ -4a-4b-4c$ [ ]

(4) বিয়োগ কর : $3a+2b+c$ হইতে $4a+3b-2c$ [ ]

(5) গুণ কর : $(2a-3b)$-কে $3ab$ দ্বারা [ ]

(6) ভাগ কর : $a^3b^4c^5-6a^2b^3c^4+18a^5b^4c^3$কে $3abc$ দ্বারা [ ]

(7) ভাগ কর : $(a^2+11a+28)$-কে $(a+7)$ দ্বারা [ ]

18

(8) যদি $y = 2x + 1$ হয়, $x$-এর বিভিন্ন মানে $y$-এর মান কত হইবে, $y$-এর ঘরে লিখ :

| $x =$ | 1 | 0 | 2 | 3 | $-2$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y =$ | 3 | | | | | |

(9) একটি গাছে $2x$ এবং আর একটি গাছে $3x$ সংখ্যক পাখী বসিয়াছিল; প্রথম গাছটিতে 2-টি নূতন পাখী আসিয়া বসিল এবং দ্বিতীয় গাছটি হইতে 3-টি পাখী উড়িয়া গেল ; ইহাতে দেখা গেল উভয় গাছেই সমান সংখ্যক পাখী বসিয়া আছে। প্রথমতঃ কোন্ গাছে কয়টি পাখী ছিল ? [ ]

(10) কোন পিয়ন $O$-পোষ্ট অফিস হইতে সোজা পূর্ব দিকে $3x + y$ কি.মি. দূরে একখানি চিঠি বিলি করিয়া তথা হইতে সোজা পূর্ব দিকে $2y - x$ কি.মি. দূরে আর একখানি চিঠি বিলি করিল এবং তথা হইতে পুনরায় $x + 2y$ কি.মি. পশ্চিম দিকে ফিরিয়া আসিল। আর কত কি.মি. চলিলে সে $O$-পোষ্ট অফিসে পৌঁছাইবে ? [ ]

(11) প্রতি ডজন লেবুর মূল্য $a$-পয়সা এবং প্রতি ডজন আমের মূল্য $b$-পয়সা। 24-টি লেবু এবং 36-টি আমের মোট মূল্য কত টাকা ? [ ]

(12) পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ এবং পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি $x$ বৎসর। প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর। [ ]

(13) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ $(x - 10)^\circ$, উহার ভূমিস্থ প্রত্যেক কোণের পরিমাণ ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [ ]

## VI. * চিহ্নিত স্থানের উপযুক্ত অঙ্ক বা চিহ্ন বসাও :

(1) $(a+b)^3 = a^3 * 3a^2b * 3ab^2 * b^3$ [ ]

(2) $(a-b)^3 = a^3 * 3a^2b * 3ab^2 * b^3$ [ ]

(3) $(2x+y)^3 = 8x^3 + * + * + y^3$ [ ]

(4) $(x+2)(x^2 * 2x + 4) = x^3 + 8$ [ ]

(5) $(2x - 3y)(4x^2 * 6xy + 9y^2) = 8x^3 - 27y^3$ [ ]

(6) $(x * 5)(x * 2) = x^2 + 3x - 10$ [ ]

(7) $(x-7)(x+5)=x^2 * 2x * 35$ [ ]

(8) $(a+b)^2+(a-b)^2=*(a^2+b^2)$ [ ]

(9) $(a+b)^2-(a-b)^2=4*$ [ ]

(10) $(x^4-y^4)\div(x+y)=( * )(x^2+y^2)$ [ ]

(11) $a^3+b^3=(a+b)^3-*ab*$ [ ]

(12) $(2a+*)^3=8a^3+*a^2+*a+27$ [ ]

(13) $1+15a+75a^2+125a^3=*$, যখন $a=\frac{3}{5}$ [ ]

(14) $(a+b)( * )(a^3-b^3)=a^6-b^6$ [ ]

**VII.** (1) যদি $5(x-1)=0$ হয়, $x$-এর মান কত ? [ ]

(2) যদি $(x-2)+(x-3)=0$ হয়, $x$-এর মান কত ? [ ]

(3) যদি $(a-b)(b-c)=0$ ; $a$, $b$, $c$-এর সম্বন্ধ কিরূপ ? [ ]

(4) যদি $xy=0$ হয়, এবং $x=0$ না হয় ; তাহা হইলে $y=$ কত ? [ ]

(5) যদি $a=201\frac{1}{2}$ এবং $b=134\frac{1}{3}$ হয়,
$8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$ এর মান নির্ণয় কর। [ ]

(6) যদি $2x-y=3$ হয়, $8x^3-y^3-18xy=$ কত ? [ ]

(7) $102^2-101^2=$ কত ? [ ]

(8) কোন দুর্গে $x$-সংখ্যক সৈন্যের $y$-সংখ্যক দিনের খাদ্য আছে ; ঐ দুর্গে আরও $z$-সংখ্যক নূতন সৈন্য আসিলে, সঞ্চিত খাদ্যে কত দিন চলিবে ? [ ]

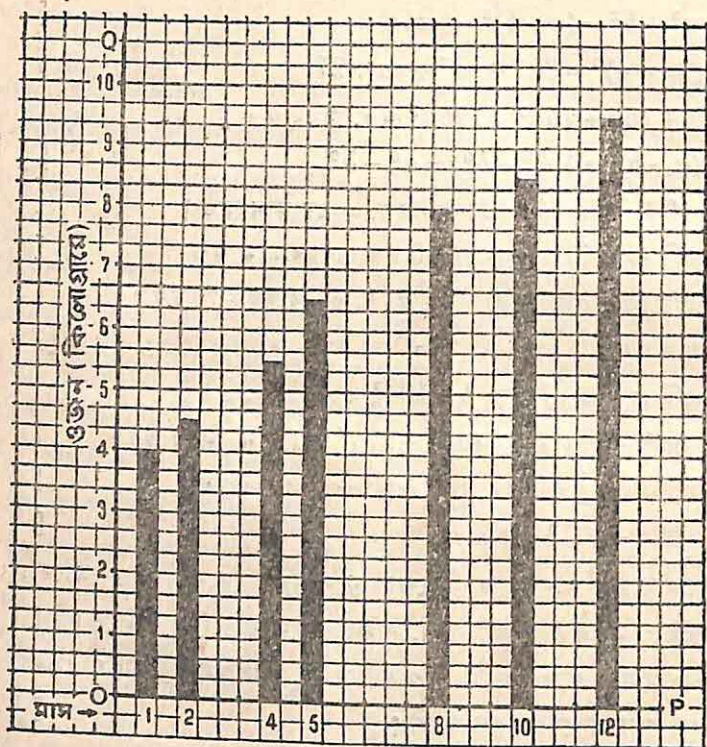
(9) $x$-মিটার দীর্ঘ একটি দণ্ড হইতে $y$ ডেসিমিটার কাটিয়া ফেলা হইল ; অবশিষ্ট অংশ সমগ্র দৈর্ঘ্যের কত অংশ ? [ ]

(10) $n$-সংখ্যক প্রথম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $\frac{n(n+1)}{2}$ হইলে, প্রথম 20-টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি কত ? [ ]

(11) কোন সরলরেখার উপর $A$, $B$, $C$, $D$ চারিটি বিন্দু পর পর লওয়া হইল। যদি $AC=x$ সে.মি., $BD=y$ সে.মি. এবং $AD=z$ সে.মি. হয়, তাহা হইলে $BC$-র দৈর্ঘ্য কত সেন্টিমিটার ? [ ]

A B C D

(12) ঘোড়া সমেত একখানি গাড়ীর মূল্য $x$-টাকা। যদি গাড়ীর মূল্য ঘোড়ার মূল্য অপেক্ষা $y$-টাকা বেশী হয়, তাহা হইলে ঘোড়ার মূল্য কত টাকা ? [ ]

**VIII.** একটি শিশুর জন্মের প্রথম মাস হইতে এক বৎসর পর্যন্ত কয়েক মাসের দৈহিক ওজনের একটি স্তম্ভলেখ প্রদত্ত হইল।

উক্ত লেখ-চিত্র হইতে নিম্নলিখিত প্রশ্ন কয়টির উত্তর কর ঃ

(i) শিশুটির তৃতীয় মাসের ওজন মোটামুটি কত হইতে পারে ? [ ]

(ii) শিশুটির সপ্তম মাসের ওজন মোটামুটি কত ? [ ]

(iii) শিশুটির কোন্ মাসের ওজন 7 কি. গ্রা. হইতে পারে ? [ ]

(iv) কোন্ মাসে শিশুটির ওজন সর্বাপেক্ষা বেশী বাড়িয়াছে ? [ ]

(v) কোন্ মাসে শিশুটির ওজন সর্বাপেক্ষা কম বাড়িয়াছে ? [ ]

# পরিভাষা

abscissa—ভুজ
absolute—পরম
absolute (value)—পরম ( মান )
abstract number—শুদ্ধ সংখ্যা
addition—যোগ, সংকলন
adfected quadratic—মিশ্র দ্বিঘাত
alternando—একান্তর ক্রিয়া
alternative proof—বিকল্প প্রমাণ
ambiguous—দ্ব্যর্থক
arithmetic series—সমান্তর শ্রেণী
ascending order—ঊর্ধ্ব ক্রম
associative law—সংযোগ নিয়ম
axiom—স্বতঃসিদ্ধ
axis—অক্ষ
binomial—দ্বিপদ
biquadratic—চতুর্ঘাত
braces—ধনুর্বন্ধনী
brackets—বন্ধনী
cancellation—অপসারণ
circle—বৃত্ত
coefficient—গুণক, সহগ
column—স্তম্ভ, পাটী
combination—সমবায়
commensurable—প্রমেয়
commutative law—বিনিময়-নিয়ম
complex (fraction)—দুরূহ, জটিল ভগ্নাংশ
componendo—যোগক্রিয়া
compound—মিশ্র

concrete number—বদ্ধ সংখ্যা
conditional identity—সাপেক্ষ অভেদ
conjugate surd—বিপরীত করণী
constant (quantity)—ধ্রুবক
continued product—ক্রমিক বা
ধারাবাহিক গুণফল
co-ordinates—স্থানাঙ্ক, ভুজ-কোটি
cross multiplication—বজ্রগুণন
cube—ঘন
cube-root—ঘনমূল
cubic—ত্রিঘাত, ঘন
cyclic order—চক্র-ক্রম
deduction—সিদ্ধান্ত
degree (of an expression)—মান
denominator—হর
dependent (variable)—অধীন
descending order—অধঃক্রম
dimension—মাত্রা
distributive law—বিচ্ছেদ-নিয়ম
dividend—ভাজ্য
dividendo—ভাগক্রিয়া
divisibility—বিভাজ্যতা
divisibility theorem—বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা
divisor—ভাজক
elimination—অপনয়ন
equation—সমীকরণ
evolution—অবঘাতন, মূলাকর্ষণ
expansion—বিস্তৃতি

exponent or index—সূচক
expression—রাশি, রাশিমালা
factor—উৎপাদক, গুণক
factorization—উৎপাদক নির্ণয়, গুণক নির্ণয়
formula (statement)—সূত্র
fraction—ভগ্নাংশ
function—অপেক্ষক
geometric series—গুণোত্তর শ্রেণী
graph—লেখ, চিত্র
graphical—লৈখিক
harmonic series—বিপরীত শ্রেণী
homogeneous—সমমাত্র
horizontal—অনুভূমিক
identity—অভেদ
imaginary—কল্পিত
incommensurable—অমেয়
independent (variable)—স্বাধীন
index—সূচক
index law—সূচক-নিয়ম
inequality—অসমতা
infinite, infinity—অসীম, অনন্ত
insertion—স্থাপন
integral—অখণ্ড
invertendo—বিপরীত ক্রিয়া
involution—উদ্ঘাতন, শক্তি-উন্নয়ন
irrational—অমূলদ
letter—অক্ষর
like—সদৃশ
limit—সীমা, কাষ্ঠা
limiting value—সীমাস্থমান
linear—একঘাত
literal coefficient—আক্ষরিক সহগ
maximum—চরম, বৃহত্তম
measure—সংখ্যামান
minimum—অবম, লঘিষ্ঠ
minor—অনুরাশি
minuend—বিয়োজন
monomial—একপদ
multinomial—বহুপদ
multiplicand—গুণ্য
multiplier—গুণক
natural number—স্বাভাবিক
negative—ঋণ, নেগেটিভ
numerator—লব
numerical value—সাংখ্যমান
order—ক্রম
ordinate—কোটি
origin—মূলবিন্দু
parentheses—লঘুবন্ধনী
plotting of points—বিন্দু-স্থাপন
polynomial—বহুপদ
positive—ধন, পজিটিভ
power—ঘাত
product—গুণফল
progression—প্রগতি
property (mathematical)—ধর্ম
proportion—সমানুপাত
proposition—প্রতিজ্ঞা
pure quadratic—অমিশ্র দ্বিঘাত
quadrant—পাদ
quadratic—দ্বিঘাত
quantity—রাশি
quotient—ভাগফল
radical sign—মূল-চিহ্ন